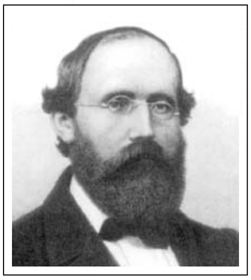
Intégrales Impropres

Bernhard Riemann 1826–1866



Mathématicien allemand[1]. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante[2] à l'analyse et à la géométrie différentielle. Dans sa thèse, présentée en 1851, Riemann met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe, introduisant notamment le concept des surfaces qui portent son nom, notamment les sphères de Riemann. Il approfondira cette théorie en 1857, en mettant au point la théorie des fonctions abéliennes.

Lors de sa soutenance d'habilitation[3], en 1854, il donne un exposé, orienté par Gauss, intitulé « Sur les hypothèses sous-jacentes à la géométrie » (*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*) qui jette les bases de la géométrie différentielle[4]. Il a introduit la bonne façon d'étendre à n dimensions les résultats de Gauss lui-même sur les surfaces. Cette soutenance a profondément changé la conception de la notion de géométrie, notamment en ouvrant la voie aux géométries non euclidiennes et à la théorie de la relativité générale.

On lui doit également d'importants travaux sur les intégrales, poursuivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann. Il est aussi connu pour sa conjecture (appelée « hypothèse de riemann ») :

$$\text{les zéros de la fonction } \zeta : s \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} \text{ se situent sur la droite}^{5}\ \Re e(s) = 1/2.$$

Table des matières

[1]Merci à Wikipedia et, surtout au site historique de l'université de St Andrews : « The MacTutor History of Mathematics archive » (`http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/`). Allez faire un tour et cherchez un nom au hasard...

[2]Son nom apparaît dans nombre de définitions, théorèmes et autres objets...

[3]Pour être nommé professeur d'université il fallait à l'époque être habilité. Il s'agit d'une sorte de super-thèse où le candidat démontre ses qualités de chercheur et d'enseignant. Aujourd'hui, l'équivalent s'appelle l'Habilitation à Diriger des Recherches.

[4]La géométrie qui utilise les outils d'analyse pour étudier les objets géométriques de « l'intérieur ». Elle permet, par exemple, de répondre à la question : « comment savoir que la terre n'est pas plate tout en restant sur sa surface ».

[5]Il n'y a pas un problème ?

Les questions

1 Intégrales convergentes et fonctions intégrables

Quand dit-on qu'une intégrale converge ?

Voir les définitions 4 et 6 ainsi que les exemples 1, 3.

Qu'est-ce que la nature d'une intégrale ?

Voir la définition 5. Le mot « nature » est utilisé dès qu'on examine la convergence ou la divergence d'une suite, d'une série ou d'une intégrale. Il faut donc préciser de quoi on parle. On n'écrira pas : « ~~ça converge~~ », mais on sera *précis* en disant : « l'intégrale tagada converge ».

Que peut-on dire de la nature de $\int_{[a,b[} f$ si f a une limite en b ?

Voir la propriété 2. Bien faire attention : on ne peut *rien*[6] dire quand $b = +\infty$.

Quand dit-on qu'une intégrale converge absolument ?

Voir la définition 8.

Qu'est-ce qu'une fonction intégrable ?

Voir la définition 10.

Pourquoi la convergence absolue est-elle importante ?

Voir le théorème 17. En prenant la valeur absolue, on obtient une fonction *positive* et on peut donc utiliser les théorèmes de comparaison ainsi que les fonctions de référence.

[6]En fait pas grand-chose. Voir l'exemple 1. Le cas $\ell = 0$ reste ouvert et est donc *intéressant*...

Existe-t-il des intégrales convergentes qui ne convergent pas absolument ?

Oui ! Voir l'exemple 8.

Quels sont les théorèmes de comparaison ?

Les théorèmes contenus dans le théorème 18. Ils sont *incontournables*.

À quoi servent les théorèmes de comparaison ?

Ils permettent de se ramener à des cas déjà étudiés ou à des cas connus : les fonctions de référence.

Quelles sont les fonctions de référence à connaître ?

Les exemples de Riemann (propriétés 10 et 12) ainsi que les exponentielles via la propriété 13.

Comment étudier la nature d'une intégrale ?

Voir le paragraphe correspondant.

2 Techniques de calcul

Comment relier intégrale et primitive ?

Voir les remarques après la propriété 3.

Comment effectuer une intégration par parties ?

Voir le théorème 15 ! En cas de doutes, la méthode est de découper l'intervalle d'intégration pour se ramener à un segment, puis à prendre la (les) limite(s).

Comment faire un changement de variables ?

Voir le théorème 14 et les exemples 5. La méthode décrite pour l'intégration par parties est aussi utilisable pour faire un changement de variables ; moins puissante que le théorème 14, elle est souvent plus confortable...

Les savoir-faire

- Savoir distinguer une intégrale impropre d'une intégrale définie.
- Diagnostiquer la nature (convergence ou divergence) d'un intégrale impropre en utilisant les fonctions de référence ainsi que les théorèmes de comparaison.

- Pratiquer un changement de variables dans un intégrale impropre. Ne pas oublier d'hypothèse !
- S'approprier la notion de fonction intégrable et savoir jongler entre *fonction intégrable* et *intégrale absolument convergente*.
- Savoir ce qu'est une fonction de carré intégrable.

I Fonctions définies par morceaux

Dans la suite $\boxed{}$ désigne au choix : constante, affine, continue, $\mathcal{C}^1$ etc.

Définition 1
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la fonction f est $\boxed{}$ *par morceaux sur* $[a, b]$ si il existe une *subdivision* $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a, b]$ (dite *adaptée* à f) telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction f_k, restriction de f à $]a_k, a_{k+1}[$ soit prolongeable en une fonction $\boxed{}$ sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$

Remarques

1. Constante par morceaux = en escaliers. Continue et affine par morceaux = le graphe est une ligne brisée.
2. La définition est claire : la valeur de f aux points de la subdivision n'a pas d'importance.
3. On peut aisément voir que si on a plusieurs fonctions $\boxed{}$ par morceaux, on peut trouver une subdivision de $[a, b]$ adaptée à toutes ces fonctions.
4. Dès que $\boxed{}$ est « continue » ou mieux, alors la fonction a une limite *finie* à droite ainsi qu'à gauche en tout point.

Définition 2
Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. La fonction f est $\boxed{}$ par morceaux sur I si elle $\boxed{}$ par morceaux sur tout segment de I

Remarques

1. Bien entendu cette définition n'apporte quelque chose de neuf que dans le cas où I n'est pas un segment.

2. le point 4 de la remarque précédente est un moyen très utile pour montrer qu'une fonction définie par morceaux n'est pas continue par morceaux. Un exemple : la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
n'est *pas* continue par morceaux, quand bien même, sur chaque intervalle ouvert de $\mathbb{R}_+$ elle est continue.

Propriété 1
L'ensemble des fonctions continues (resp. $\mathcal{C}^k$) par morceaux est un espace vectoriel stable par le produit des fonctions.

Définition 3
Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t)\,\mathrm{d}t$$
où les fonctions f_k sont les fonctions introduites dans la définition 1.

Remarques
1. La définition précédente ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie[7].
2. On remarque donc que la valeur de la fonction aux points de la subdivision n'influe pas sur la valeur de l'intégrale : changer la valeur prise par une fonction en un nombre fini de points ne change pas son intégrale.

II Intégrales impropres ou généralisées

1 Définitions

[7] Encore heureux !

Définition 4

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b \leq +\infty$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'*intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *convergente* ou encore que f admet une *intégrale impropre* sur $[a, b[$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas, on notera $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

   Dans le cas contraire, l'*intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite *divergente*.

2. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a < b$ et $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'*intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *convergente* ou encore que f admet une *intégrale impropre* sur $]a, b]$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas, on notera $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

   Dans le cas contraire, l'*intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite *divergente*.

Définition 5

La *nature* d'une intégrale impropre est sa convergence ou sa divergence.

Il est primordial, lors de la rédaction de préciser quel est l'objet dont on examine la nature. Il ne faut pas dire ~~ça converge~~, mais dire *l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*.

Par exemple dans certains exercices on est amené à étudier une suites d'intégrales impropres $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Il faut alors :

1. *d'abord* examiner la convergence de chacune des intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$;
2. *ensuite* étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

L'exemple 9.5 s'étudiera en utilisant la méthode ci-dessus.

Exemples 1

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^t\,\mathrm{d}t$.
5. Si $\ell \neq 0$ et $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Propriété 2 (faux problème)
Soient a et b deux **réels**, avec $a < b$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Si f a une limite **finie** en b alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque Il y a **toujours** un problème en $\pm\infty$!

Exemples 2
Les intégrales suivantes sont convergentes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$

Propriété 3 (Chasles)
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{R}$, avec $a < b \leq +\infty$, $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $c \in [a, b[$. Alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
De plus, si elles convergent alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a un résultat analogue pour $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$.

Propriété 4
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

Supposons qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ **et** $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent alors :

Pour tout $c' \in]a,b[$ les intégrales $\displaystyle\int_a^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c'}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c'}^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition 6
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si il existe $c \in]a,b[$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ **et** $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Dans ce cas on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans tous les autres cas, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exemples 3

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$.

Propriété 5
Soit I un intervalle d'extrémités a et b avec $a < b$ qui n'est pas un segment.

(1) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_a^b \Re e\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \Im m\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$ convergent et dans ce cas on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Re e\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \Im m\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

(2) L'ensemble E des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $f \in \mathrm{E} \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur E.

Remarques

1. Si I est un intervalle de bornes a et b $(a < b)$ alors on note

$$\int_I f = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Dans cette notation les bornes sont toujours dans le « bon ordre »...

2 Intégrale des fonctions à valeurs réelles positives

a Propriété fondamentale

Propriété 6

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b \leq +\infty$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux ne prenant que des valeurs **positives**.

(1) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \in [a, b[\longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est *majorée*.

(2) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge si et seulement si :

$$\lim_{x \longrightarrow b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Exemples 4

1. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où a, b sont des **nombres**[8] et f est continue par morceaux, positive et **bornée** sur $]a,b]$ ou $[a,b[$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
3. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$.

b Positivité de l'intégrale

Propriété 7
Soient a, b tels que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit f une fonction continue par morceaux et **positive** sur un intervalle de bornes a et b. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge lors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

Si, de plus f est **continue** (et toujours positive) alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f \text{ est la fonction nulle}$$

Corollaire 8 (croissance de l'intégrale)
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et telles que :

(a) les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

(b) pour tout t, $f(t) \leq g(t)$

Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

[8] Pas $\pm\infty$!...

c Comparaison série-intégrale

Théorème 9
Soit f une fonction **positive** et **décroissante** sur $[N, +\infty[$ où $N \in \mathbb{N}$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_N^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et la série $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$ sont de même nature

3 Intégrales de fonctions de référence

Propriété 10 (exemple de Riemann : intervalle borné)

Soit α un réel. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Propriété 11

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Propriété 12 (exemple de Riemann : intervalle non borné)

Soit α un réel. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Propriété 13
Soit α un réel. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

4 Transformations d'une intégrale impropre

Théorème 14 (changement de variables)
Soient $\varphi :]\alpha, \beta[\longrightarrow]a, b[$ une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ et f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.
Les intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u) \cdot \varphi'(u)\, \mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ sont de même nature et dans le cas où elles convergent sont égales, c'est à dire :

$$\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u) \cdot \varphi'(u)\, \mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$$

Exemples 5

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{(1+u)^2}\, \mathrm{d}u$. $\varphi(t) = t^2$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$. $\varphi(t) = 1/t$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^\alpha)\, \mathrm{d}t$. $\varphi(t) = t^\alpha$. Attention : il faut distinguer les cas $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$...

Définition 7
Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $]a, b[$ possédant une limite en a et en b. La variation de f sur cet intervalle, notée $\big[f\big]_a^b$ ou $\big[f(t)\big]_a^b$, est la quantité :

$$\big[f(t)\big]_a^b = \lim_{t \longrightarrow b} f(t) - \lim_{t \longrightarrow a} f(t).$$

Théorème 15 (Intégration par parties)
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]a, b[$. Si $\big[f(t)g(t)\big]_a^b$ existe alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\, \mathrm{d}t$ sont de même nature et, si elles convergent :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\, \mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exemples 6

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$$

III Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

1 Intégrales absolument convergentes

Ici et *dans toute la suite du chapitre* a et b sont deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. I désigne un intervalle de bornes a et b qui n'est pas un segment.

Définition 8
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument* ou est *absolument convergente* si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Propriété 16

(1) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument si et seulement si les **deux** intégrales $\displaystyle\int_a^b \Re e\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \Im m\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$ convergent absolument.

(2) L'ensemble F des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

Théorème 17
Une intégrale impropre qui converge absolument est convergente.

Remarque En d'autres termes F est un sous-espace vectoriel de E (voir les propriétés 5, 16 et le théorème 17).

Exemples 7

1. f bornée sur I et I est borné (i.e. a et b sont réels). Par exemple $\int_0^1 \sin(1/t)\,\mathrm{d}t$.
2. $\int_1^{+\infty} \sin(t)\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$.
3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{\operatorname{ch}(t)}}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2 Intégrales semi-convergentes

Définition 9
Une intégrale impropre qui converge mais n'est pas absolument convergente est dite *semi-convergente*

Exemple 8 (Classique, vu en concours) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente pour $\alpha \in]0,1]$

3 Fonctions intégrables

Définition 10
Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle de bornes a et b.

Alors f est *intégrable sur* I si et seulement si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Remarque Il s'agit donc d'un changement de point de vue. D'une propriété d'existence d'une intégrale on passe à une propriété sur une fonction. Notamment plutôt que montrer qu'une fonction est intégrable, on montre qu'une certaine intégrale converge absolument.

4 Théorèmes de comparaison

Théorème 18
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

(1) Si $|f| \leq |g|$ et si g est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors f est aussi intégrable sur $[a, +\infty[$.

(2) Si $f \underset{+\infty}{=} O(g)$ et si g est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors f est aussi intégrable sur $[a, +\infty[$.

(3) Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si g est aussi intégrable sur $[a, +\infty[$.

Remarques

1. Il y a bien sur des versions équivalentes pour les intervalles $]-\infty, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ etc. Souvenez vous : traiter un seul problème à la fois.
2. Un o induit un O... On peut donc conclure si $f = o(g)$.

Exemples 9

1. f bornée sur I et I est borné (i.e. a et b sont réels). Par exemple $\displaystyle\int_0^1 \sin(1/t)\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t) \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) \mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{\mathrm{ch}(t)}}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\tan t)^\alpha\,\mathrm{d}t$.
5. Étude de la suite $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

5 Intégrale nulle

Propriété 19
Soit f une fonction **continue, positive** et intégrable sur un intervalle I de bornes a et b.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ implique $f = 0$ sur I.

6 Fonctions de carré intégrable

Définition 11
Une fonction f, continue par morceaux sur I, est de *carré intégrable* sur I si et seulement si f^2 est intégrable sur I.

Propriété 20
Le produit de deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I et de carré intégrable est une fonction intégrable.

Propriété 21
L'ensemble $L_2(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de carré intégrable est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Propriété 22 (inégalité Cauchy-Schwartz)
L'application :

$$(f, g) \in \big(L_2(I, \mathbb{R})\big)^2 \longmapsto \big(f \mid g\big) = \int_I fg$$

est un produit scalaire sur $L_2(I, \mathbb{R})$. On a, de plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_I fg\right)^2 \leq \int_I f^2 \cdot \int_J g^2$$

avec égalité si et seulement si il existe une constante k telle que $g = kf$.

IV Comment étudier la nature d'une intégrale ?

Voici une liste non exhaustive d'idées :

1. Étudier le domaine de continuité (par morceaux) de la fonction f.
2. Scinder les problèmes : un seul par intégrale. Voir la définition 6.
3. Commencer par étudier l'intégrabilité : on peut alors utiliser les théorèmes de comparaison et les intégrales de référence.

   Attention cependant à ne pas introduire de nouveaux problèmes lors de l'utilisation d'exemples connus. Par exemple pour étudier $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ (problème en $+\infty$) on ne compare pas à la fonction $1/t^2$ sur $[0, +\infty[$ (introduction du problème 0) mais on étudie l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ (voir la propriété 3) et on compare à la fonction $1/t^2$ sur $[1 + \infty[$.
4. Vérifier que le problème n'est pas un faux problème.
5. Chercher un équivalent simple de f au voisinage du problème et utiliser une fonction de référence.
6. S'il n'y a pas de convergence absolue, revenir à la définition. On peut alors tenter un intégration par parties pour pouvoir « simplifier » le problème (voir l'exemple 8).