Fonctions vectorielles d'une variable réelle Dérivation (provisoire)

Édouard Goursat 1858–1936

Goursat fut reçu au concours d'entrée à l'École normale supérieure après seulement une année[1] de classe préparatoire au lycée Henri-IV en 1876. Il soutint en 1881 une thèse portant sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéometrique. Ses professeurs étaient Gaston Darboux et Charles Hermite.

L'ouvrage le plus connu de Goursat est son cours d'analyse, qui couvre l'ensemble de la discipline, du moins telle qu'on pouvait la connaître vers 1900. L'auteur en révisa les éditions successives jusqu'à sa mort. Ce cours reflète la part écrasante prise par l'analyse classique dans l'enseignement des mathématiques en France jusque dans les années 30, c'est-à-dire jusqu'à ce que l'influence de l'école algébrique allemande se fasse sentir à l'initiative du collectif Bourbaki. Les jeunes mathématiciens de l'entre-deux guerres considérèrent alors avec dédain ce cours d'analyse, trop touffu et ne répondant plus aux nouveaux canons de la rigueur ensembliste. Pour autant, sa définition de fonction est toujours[2] au goût du jour :

> On dit que y est une fonction de x si a une valeur de x correspond une valeur de y. On indique cette correspondance par l'équation $y = f(x)$.

Table des matières

[1]Un vrai cador !

[2]Encore que, dans les années 70, les mathématiques "modernes" ont imposé (et l'ont fait digérer aux collégiens/lycéens de cette époque) quelque chose du genre :

Relation $\mathcal{A}$ est une *relation* $\iff$ $(\forall x)(x \in \mathcal{A} \Rightarrow (\exists u)(\exists v)(x = (u, v))$. On écrit $u\mathcal{A}v$ si $(u, v) \in \mathcal{A}$.

Fonction f est une *fonction* $\iff$ f est une relation et $(\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)(xfy_1$ et $xfy_2 \Rightarrow y_1 = y_2)$. On écrit $y = f(x)$ si xfy (c'est-à-dire $(x, y) \in f$)

Simple, intuitif et facile à utiliser, non ?

Les savoir faire

1 Se souvenir

- Que “vectorielle” est une extension de “à valeurs numériques”.
- Qu’on peut toujours se ramener aux coordonnées.

2 Continuité

- Lire le cours sur la continuité dans un espace vectoriel normé !

3 Dérivabilité

- Savoir utiliser la définition de dérivée en un point, de fonction dérivable.
- Savoir dériver la composée d’une application linéaire, multilinéaire et d’une ou plusieurs fonctions vectorielles.
- Savoir diagnostiquer le caractère $\mathcal{C}^k$ d’une fonction vectorielle.
- Savoir reconnaître une application $\mathcal{C}^k$ par morceaux.
- Savoir utiliser le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$.

Le cours

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Ces fonctions sont à valeurs dans un espace vectoriel F sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension finie égale à n. Le cours de première année a traité les cas $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathrm{F} = \mathbb{C}$ (c’est-à-dire $n = 1$ ou 2).

Exemples 1

1. $f : x \in]0, 2] \longmapsto (2x^2 + 1, \ln(x), \arcsin(x - 1)) \in \mathbb{R}^3$;
2. $M : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \begin{pmatrix} \ln(x) & 1 \\ e^x & x^2+1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
3. $M : t \in \mathbb{R} \longmapsto \left(e^{ipqt}\right)_{1\leq p,q\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;
4. pour généraliser : on définit une fonction M de I et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $M(t) = \left(a_{p,q}(t)\right)_{1\leq p,q\leq n}$ où les $a_{p,q}$ sont n^2 fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{K}$;
5. Si P est un polynôme fixé de $\mathbb{K}_n[X]$, on peut définir f par : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = P(tX) \in \mathbb{K}_n[X]$. Attention : $f(t)$ est un *polynôme*, il faut comprendre qu’à t on associe les $n + 1$ coefficients de $f(t)$...

On rappelle qu'en dimension finie la notion de limite et de continuité ne dépend pas de la norme et que, sauf exception, il est inutile de préciser la norme utilisée (pour F).
On est donc dans un cas particulier des fonctions d'une partie d'un espace vectoriel normé (ici $\mathbb{R}$ est, bien sur, muni de sa norme usuelle : la valeur absolue) dans un autre espace vectoriel normé. Le but du cours est de voir les propriétés supplémentaires qu'engendre l'ensemble de départ.
Pour clarifier les choses il arrivera que l'on mette une flèche sur les objets qui appartiennent à F comme dans l'expression $x \longmapsto x \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, qui représente une fonction affine de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F.

Les nouveautés

Nouveauté

Beaucoup d'énoncés sont très proches (voire les mêmes) que ceux du cours de première année. Il reste cependant un petit nombre d'idées nouvelles ou d'extensions de notions connues. Celles-ci sont présentées par les symboles ⓝ et par une marque dans la marge. On peut donc se contenter de lire rapidement ce polycopié et de réserver son attention aux vraies nouveautés.

Vocabulaire On dit qu'une propriété, portant sur une fonction définie sur un intervalle I, est vraie au voisinage de a si et seulement si

- elle est vraie sur l'intersection de I et d'un intervalle ouvert centré en a lorsque $a \in \mathbb{R}$;
- elle est vraie sur un intervalle de la forme $]c, +\infty[$ si $a = +\infty[$;
- elle est vraie sur un intervalle de la forme $]-\infty, c[$ si $a = -\infty[$;

I Dérivée d'une fonction vectorielle de la variable réelle

1 Définitions

Définition 1 (dérivée)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. une fonction $f : I \longrightarrow$ F est *dérivable en un point* $x_0 \in I$ si l'application $x \longmapsto \dfrac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}$, définie sur $I \setminus \{x_0\}$ admet une limite en x_0. Cette limite est alors appelée *la dérivée de f en x_0* et est notée $f'(x_0)$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ ou $D(f)(x_0)$.

Propriété 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans F et $x_0 \in I$. On a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

(i) la fonction f est dérivable en x_0 ;

(ii) il existe un élément $K \in \mathrm{F}$ et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathrm{F}$ tels que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot K + (x - x_0) \cdot \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = \overrightarrow{0}.$$

Remarque On a alors $K = f'(x_0)$. La propriété (ii) qui dit que f est *différentiable* en x_0 est, en fait, l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 pour f en x_0.

Nouveauté

Définition 2 (ⓝ)

Si $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ est dérivable en x_0 alors l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans F définie par

$$\mathrm{d}f_{x_0}(h) = h \cdot f'(x_0)$$

s'appelle la *différentielle* de f en x_0.

Remarque Cette définition n'est pas très utile ici, mais elle sera centrale lorsqu'on arrivera aux fonctions de « plusieurs variables », c'est-à-dire au cas des fonctions d'une partie A d'un espace vectoriel E (différent de $\mathbb{R}$) à valeurs dans F.

Définition 3 (dérivées latérales)

Soit x_0 un élément de I qui n'est pas sa borne supérieure. Une fonction f de I dans F est dite *dérivable à droite en* x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe dans F.}$$

La limite $f'_d(x_0)$ s'appelle la *dérivée à droite* de f en x_0.
On définit de la même façon la *dérivée à gauche* de f en un point $x_0 \in I$ qui n'en est pas la borne inférieure.

On a directement :

Propriété 2

Soient x_0 un point I qui n'est pas une des bornes de I (donc est *intérieur* à I) et f une fonction de I dans F. On a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

(i) f est dérivable en x_0 ;

(ii) f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Définition 4 (fonction dérivée)

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ est dite *dérivable su l'intervalle* I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$ est appelée la *fonction dérivée* ou *l'application dérivée* de f sur I. On la note f', $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ou $D(f)$.

Définition 5

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$. Si J est un intervalle inclus dans I, la fonction f est *dérivable sur* J si et seulement si sa restriction $f_{|J}$ est dérivable.

Propriété 3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ et $x_0 \in I$. S'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que la restriction de f à $I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ soit dérivable en x_0 alors f est aussi dérivable en x_0.

Propriété 4

Une fonction f de I dans F est dérivable sur I si et seulement si elle l'est sur tout segment inclus dans I.

2 Propriétés des fonctions dérivables

Propriété 5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en un point est continue en celui-ci.
La réciproque est fausse.

Propriété 6 (ⓝ)

Nouveauté

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F et $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ telle que $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k e_k$.
La fonction f est dérivable en un point x_0 de I si et seulement si toutes les fonctions

coordonnées f_k le sont. On aura alors :

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x_0)e_k.$$

Exemple 2 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$ définie par $f(t) = P(tX)$. Montrer que $f'(t) = XP'(tX)$.

Corollaire 7

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en x_0 si et seulement si ses fonctions partie réelle et partie imaginaire le sont. On a alors :

$$f'(x_0) = \Big(\Re e(f)\Big)'(x_0) + i\Big(\mathrm{Im}(f)\Big)'(x_0).$$

Il en découle que $\overline{f}$ est aussi dérivable en x_0 et :

$$\Big(\overline{f}\Big)'(x_0) = \overline{f'(x_0)}.$$

Propriété 8 (combinaison linéaire)

Soient f et g deux fonctions de I dans F dérivables en x_0 et λ, μ deux nombres. Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et :

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

Nouveauté

Propriété 9 (ⓝ)

Soient $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ dérivable en x_0 et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ où G est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (normé) de dimension finie.
Alors l'application $g = u \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(u \circ f)'(x_0) = u\Big(f'(x_0)\Big).$$

Nouveauté

Propriété 10 (ⓝ)

Soient F_1, F_2 et G trois espaces vectoriels (normés) de dimension finie et $B : \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \longrightarrow \mathrm{G}$ une application bilinéaire.
Si $f_1 : I \longrightarrow \mathrm{F}_1$, $f_2 : I \longrightarrow \mathrm{F}_2$ sont deux applications dérivables en x_0 alors l'application $B(f_1, f_2)$ qui à x associe $B(f_1(x), f_2(x))$ est dérivable en x_0 et :

$$\Big(B(f_1, f_2)\Big)'(x_0) = B(f_1'(x_0), f_2(x_0)) + B(f_1(x_0), f_2'(x_0)).$$

Exemples 3

1. $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont des fonctions dérivables. Dérivée de AB ?

2. Si $n = p$, dérivée de A^2 ?

Remarque Ce théorème est à rapprocher de celui qui donne la dérivée d'un produit de fonctions à valeurs numériques. Il y a un théorème équivalent pour la dérivée de $\varphi(f_1, \ldots, f_p)$ où φ est p-linéaire... La règle de base : on dérive comme si on avait un produit de p termes. Le cas le plus courant étant la dérivation d'un déterminant.

Corollaire 11

Soient $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables en x_0.
Alors la fonction $\gamma f : x \in I \longmapsto \gamma(x)f(x)$ est dérivable en x_0 et :

$$\big(\gamma f\big)'(x_0) = \gamma'(x_0)f(x_0) + \gamma(x_0)f'(x_0).$$

Nouveauté

Corollaire 12 (ⓝ cas particulier du produit scalaire)

Soient F un espace euclidien et f, g deux fonctions de I dans F dérivables en x_0.
Alors la fonction $(f \mid g) : x \in I \longmapsto \big(f(x) \mid g(x)\big)$ est dérivable en x_0 et :

$$(f \mid g)'(x_0) = \big(f'(x_0) \mid g(x_0)\big) + \big(f(x_0) \mid g'(x_0)\big).$$

En particulier $\|f\|^2$ est dérivable en x_0 et :

$$\big(\|f\|^2\big)'(x_0) = 2\big(f'(x_0) \mid f(x_0)\big).$$

Corollaire 13

Soient F un espace euclidien et $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ une fonction de norme constante sur I et dérivable en x_0. On a alors :

$$\big(f'(x_0) \mid f(x_0)\big) = 0.$$

Propriété 14 (composée)

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathrm{F}$ deux fonctions respectivement dérivables en $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in J$, avec $f(I) \subset J$.
Alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'\big(f(x_0)\big).$$

Nouveauté

Corollaire 15 (ⓝ)

Soient F un espace euclidien et $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ une fonction dérivable en x_0.

Si $f(x_0) \neq \overrightarrow{0}$ alors la fonction $\|f\|$ est dérivable en x_0 et :

$$\|f\|'(x_0) = \frac{\big(f'(x_0) \mid f(x_0)\big)}{\|f(x_0)\|}.$$

Propriété 16

Soit $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I.
Alors la fonction f est constante sur I si et seulement si sa dérivée est nulle sur I.

II Dérivées successives d'une fonction vectorielle

1 Définitions

Définition 6

- Si la fonction dérivée f' d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ est dérivable sur I, alors sa dérivée est appelée la fonction *dérivée seconde* de f et est notée f'', $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ ou $D^2(f)$.
- Par récurrence, on définit de même les fonctions dérivées successives de f (si elles existent). Si $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction dérivée k^{e} est notée $f^{(k)}$, $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$ ou $D^k(f)$.

Remarque On note $f^{(0)} = f$ et on a donc, sous réserve d'existence :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)' = \left(f'\right)^{(k)}.$$

Définition 7

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. une fonction $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ est dite de *classe* $\mathcal{C}^p$ sur I si et seulement si elle est p fois dérivable sur I et sa dérivée p^{e} est continue sur I.
Une fonction est dite de *classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur I si est seulement si pour tout entier p, elle est p fois dérivable sur I.

Notation Pour $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, on note :

- $\mathcal{D}^p(I, \mathrm{F})$ l'ensemble des fonctions p dérivables sur I à valeurs dans F ;
- $\mathcal{C}^p(I, \mathrm{F})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur I à valeurs dans F.

On a clairement $\mathcal{D}^\infty(I, \mathrm{F}) = \mathcal{C}^\infty(I, \mathrm{F})$.

Définition 8

Soient $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ et J un intervalle inclus dans I. La fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^p$ sur J si et seulement si sa restriction $f_{|J}$ est de classe $\mathcal{C}^p$.

Remarque $x \longmapsto |x|$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ bien qu'elle ne soit pas dérivable en 0 car sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est $x \longmapsto x$...

Propriété 17

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.
Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur tout intervalle J inclus dans I.

Propriété 18

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. une fonction $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur tout segment J inclus dans I.

Définition 9

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

1. Une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans F est dite de *classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux* sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_j)_{0 \leq j \leq p}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]x_j, x_{j+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$. Une telle subdivision est dite *subordonnée* ou *adaptée* à f.
2. Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. une fonction $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur I si et seulement si elle l'est sur tout segment inclus dans I.

Notation Pour $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, on note $\mathcal{CM}^p(I, \mathrm{F})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur I et à valeurs dans F.

2 Propriétés des dérivées successives

Propriété 19

Soit I un intervalle et $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Les ensembles $\mathcal{D}^p(I, \mathrm{F})$, $\mathcal{C}^p(I, \mathrm{F})$ et $\mathcal{CM}^p(I, \mathrm{F})$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathcal{F}^p(I, \mathrm{F}) = \mathrm{F}^I$ des applications de I dans F.
De plus, si $\mathrm{F} = \mathbb{K}$, ils sont stables par le produit usuel.

Propriété 20

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathrm{F}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I (respectivement de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur I) si et seulement si, ses fonctions coordonnées par rapport à une base de F le sont.
En particulier si $\mathrm{F} = \mathbb{C}$, f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I (respectivement de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur I) si et seulement si, les fonctions $\Re e\, f$ et $\Im m\, f$ le sont.

Nouveauté

Théorème 21 (ⓝ formule de Leibniz ; version bilinéaire)

Soient F_1, F_2 et G trois espaces vectoriels (normés) de dimension finie et $B : \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \longrightarrow \mathrm{G}$ une application bilinéaire.
Si $f_1 : I \longrightarrow \mathrm{F}_1$, $f_2 : I \longrightarrow \mathrm{F}_2$ sont deux applications p fois dérivables sur I alors l'application $B(f_1, f_2)$ est aussi p fois dérivable sur I et :

$$\Big(B(f_1, f_2)\Big)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B(f_1^{(k)}, f_2^{(p-k)})$$

Ce théorème peut se prolonger pour dériver $\varphi(f_1, , f_2, , \ldots, f_p)$ où φ est p-linéaire... Le cas le plus courant étant la dérivation d'un déterminant. La règle de base : on dérive comme si on avait un produit de p termes...

Nouveauté

Corollaire 22 (ⓝ)

(1) Si $\mathrm{F} = \mathbb{K}$ et si f, g sont deux fonction de I dans $\mathbb{K}$ qui son p fois dérivables sur I alors :
$$\Big(fg\Big)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}.$$

(2) Si F est un espace euclidien et si f, g sont deux fonction de I dans F qui son p fois dérivables sur I alors :
$$\Big(f \mid g\Big)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \Big(f^{(k)} \mid g^{(p-k)}\Big).$$

(3) Si A, B sont deux fonction de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui son p fois dérivables sur I alors :
$$\Big(AB\Big)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{(k)} B^{(p-k)}.$$

Nouveauté

Corollaire 23 (ⓝ)

Soient $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, F_1, F_2 et G trois espaces vectoriels (normés) de dimension finie et $B : \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \longrightarrow \mathrm{G}$ une application bilinéaire.

Si $f_1 : I \longrightarrow \mathrm{F}_1$, $f_2 : I \longrightarrow \mathrm{F}_2$ sont deux applications de classe $\mathcal{C}^p$ sur I alors l'application $B(f_1, f_2)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

Propriété 24

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. si $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^p(J, \mathrm{F})$ et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^p$ sur I.