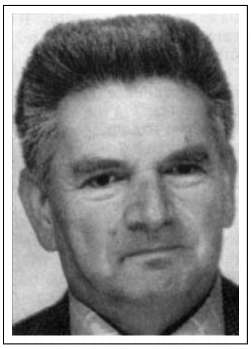
Espaces vectoriels normés
2^{e} partie : continuité

René Thom 1923–2002



René Thom[1], né à Montbéliard le 2 septembre 1923 et mort à Bures-sur-Yvette le 25 octobre 2002, est un mathématicien français, fondateur de la théorie des catastrophes.

René Thom fait ses études au Lycée Saint-Louis, puis à l'École normale supérieure. Il enseigne ensuite à Grenoble et à Strasbourg et devient professeur permanent à l'Institut des hautes études scientifiques en 1963.

Bien qu'il soit connu pour son développement de la théorie des catastrophes en 1968, il reçoit la médaille Fields[2] en 1958 pour des travaux antérieurs sur la topologie différentielle, en particulier la théorie du cobordisme. Il est élu membre de l'Académie des sciences en 1976.

Il est notamment l'auteur de *Stabilité structurelle et morphogenèse*, ouvrage destiné à présenter la théorie des catastrophes en termes simples (avec quelques formules tout de même) au grand public.

Par son approche multidisciplinaire des problématiques, René Thom est, avec Jules Vuillemin, l'un des plus grands épistémologues français du XX^{e} siècle.

Table des matières

[1]Merci wikipedia pour la biographie et a MacTutor pour la photographie.

[2]L'équivalent du prix Nobel pour les mathématiques. Comme les jeux olympiques, elle n'est décernée que tous les quatre ans. Le lauréat doit avoir moins de 40 ans lors de la remise.

Les questions

1 Topologie

Qu'est-ce qu'un ouvert

Voir la définition 1 et la propriété 1. On pourra aussi mettre à profit la caractérisation de la propriété 15.

Qu'est-ce qu'un fermé

Voir la définition 2 et la propriété 2. On pourra aussi mettre à profit la caractérisation des propriétés 5 et 15.

Qu'est-ce qu'un compact

Voir la définition 6. Attention cette définition n'a de sens qu'en dimension finie !

2 Applications dans des espaces vectoriels normés

À quelles conditions une application admet-elle une limite ?

Voir les définitions 7, 11 et 12. On peut aussi utiliser le théorème des « gendarmes » (propriété 9)

À quelles conditions une application linéaire est-elle continue ?

Une application linéaire est *toujours* continue en **dimension finie**. Le cas de la dimension infinie est[3] hors-programme et ne se traite qu'en exercice.

Les savoir-faire

- Savoir montrer qu'une application est continue.
- Savoir montrer qu'une partie est ouverte, fermée, compacte.
- Savoir utiliser l'image d'un compact par une fonction continue.

Le cadre

Dans tout ce cours nous supposerons que E, F et G sont trois espaces vectoriels normés de dimension *finie*. Comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, on ne

[3] Le programme le stipule : « espaces vectoriels normés de dimension finie ».

précisera pas quelle norme on prend, on se contentera d'indiquer quand c'est nécessaire à quel espace vectoriel elle se rapporte.
Le cas de la dimension infinie est **hors-programme**, mais la plupart des résultats et définitions de ce cours restent valable en dimension infinie. Dans le cas où un énoncé n'est valable qu'en dimension finie, cela sera indiqué.

I Notions de topologie

1 Ouverts, fermés

a Ouverts

Définition 1

une partie U de E est un *ouvert* ou une *partie ouverte* de E si, pour tout point x de U, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.

EXEMPLES 1
1. Toute boule ouverte $B(a, r)$ est un ouvert.
2. Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts.

Propriété 1 (propriétés des ouverts)

(1) $\emptyset$ et E sont des ouverts.

(2) Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

(3) Une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.

b Fermés

Définition 2

une partie U de E est un *fermé* ou une *partie fermée* de E si son complémentaire est un ouvert de E.

En passant au complémentaire, on a :

Propriété 2 (propriétés des fermés)

(1) $\emptyset$ et E sont des fermés.

(2) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

(3) Une réunion *finie* de fermés est un fermé.

Exemples 2

1. Toute boule fermée $B(a, r)$ est un fermé.
2. Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont des fermés.
3. Une sphère est un fermé : c'est l'intersection d'une boule fermée et du complémentaire de la boule ouverte correspondante.
4. Toute partie finie est fermée.

2 Suites et fermés

Définition 3

On dit qu'un point a de E est *adhérent* à une partie A de E si toute boule centrée en a rencontre A, c'est-à-dire :

$$\forall r > 0,\ \exists a \in A, \quad N(x - a) \leq r.$$

Exemples 3

1. Une partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure : c'est un point adhérent à A.
2. La limite d'une suite convergente est adhérente à l'ensemble des valeurs prises par cette suite.

Théorème 3

Une partie F de E est fermée si et seulement si tout point adhérent à F est dans F.

Propriété 4

Soient $a \in$ E et $A \subset$ E.
Le point a est adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a.

Propriété 5 (caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie F de E est fermée si et seulement si toute suite de points de F qui converge dans E a sa limite dans F.

Exemples 4

1. Les hyperplans affines de $\mathbb{R}^n$ sont fermés ;
2. Les demi-espaces affines de $\mathbb{R}^n$ sont fermés.

Définition 4 (topologie – HP)

La *topologie* d'un espace vectoriel normé est la donnée de l'ensemble de ses ouverts (et donc de ses fermés).

Remarque Comme nous sommes en dimension finie, les notions d'ouvert, de fermé *ne dépendent pas* de la norme choisie !

3 Intérieur, adhérence, frontière

Définition 5

Soit $A \subset \mathrm{E}$.

(a) L'*intérieur* de A est l'ensemble des points x de A tels qu'il existe r (dépendant de x) pour lequel $\mathcal{B}(x, r) \subset A$.

(b) L'*adhérence* de A est l'ensemble des points adhérents à A.

(c) La *frontière* de A est l'ensemble des points qui sont adhérents à A mais pas intérieurs à A.

4 Compacts

Définition 6 (dimension finie)

Un *compact* de l'espace vectoriel de dimension finie E est un fermé borné de E.

Remarque Attention cette « définition » n'est valable qu'en dimension *finie.* Le cas de la dimension quelconque est hors-programme.

II Étude locale d'une application

1 Quoi de neuf docteur ?

Ben rien !
Une lecture attentive de ce paragraphe ainsi que du suivant montre qu'il n'y a pas beaucoup de différences entre les notions de limite et de continuité dans un espace vectoriel normé et les mêmes notions dans $\mathbb{R}$. En effet, pour passer d'une notion étudiée pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à la notion équivalente dans les espaces vectoriels normés il suffit souvent de remplacer la valeur absolue $|\cdot|$ par une norme $\|\cdot\|$.

2 Limite, continuité en un point

Dans ce paragraphe E et F désignent deux espaces vectoriels normés de dimension finie et de normes respectives $\|\cdot\|_{\mathrm{E}}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$, A une partie de E et f une application[4] de A dans F.
Le point $a \in \mathrm{E}$ est adhérent à A. Toute boule centrée en a rencontre donc A. Deux cas particuliers vont donc se présenter :

- $a \notin A$: notion de limite « au bord d'un ensemble » ;
- $a \in A$: cas particulier de la continuité.

Définition 7

On dit que f admet au point a la *limite* $b \in \mathrm{F}$, ce qu'on note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{a} f = b$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A,\ \|x - a\|_{\mathrm{E}} \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - b\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon$$

Propriété 6

Si f admet une limite en a alors elle est unique.

Définition 8

On dit que f est continue au point $a \in A$ si et seulement si elle admet $f(a)$ pour limite en a, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A,\ \|x - a\|_{\mathrm{E}} \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon$$

Définition 9

Si une fonction f admet une limite au point $a \notin A$, on dit qu'elle est *prolongeable par continuité* en a. Son *prolongement par continuité* en a est la fonction $\hat{f}$ définie pour tout x de $A \cup \{a\}$ par :

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ \lim\limits_{a} f & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Propriété 7 (caractère local de la limite / continuité)

(1) Une fonction f admet pour limite b en a si et seulement si il existe un réel $r > 0$ tel que $f_{|A \cap \mathcal{B}(a,r)}$ admet pour limite b en a.

[4] C'est-à-dire une fonction définie en tout point de A.

(2) En particulier f est continue en $a \in A$ si et seulement si il existe un réel $r > 0$ tel que $f_{|A \cap \mathcal{B}(a,r)}$ est continue en a.

a Limite selon une partie

Il s'agit de l'extension de la notion de limite à droite ou à gauche dans les cas ou droite/gauche n'a plus de sens...

Définition 10

Soit P une partie de A telle que a soit adhérent à P. On dit que f admet une limite b en a selon la partie P, ce qu'on écrit $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \in P}} f(x) = b$, si et seulement si la restriction de f à P admet b pour limite en a.

Propriété 8

Si $A = P_1 \cup P_2$ et a est adhérent à P_1 et P_2 alors une fonction f de A dans F admet b pour limite en a si et seulement si elle admet b pour limite selon les parties P_1 et P_2

3 Extension de la limite : l'infini

Deux cas : $A \subset \mathbb{R}$ et on cherche à définir $\lim\limits_{\pm\infty} f$, ou $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ et on cherche à définir $\lim\limits_{a} f = \pm\infty$. Comme toujours, on ne fait que *transcrire* la notion que l'on connaît déjà en introduisant les normes nécessaires.

a Cas des fonctions d'une variable réelle

Ici $A \subset \mathbb{R}$ c'est-à-dire que « $f : \mathbb{R} \longrightarrow ...$ ».

Définition 11

1. Si A n'est pas majoré (et a donc $+\infty$ comme borne supérieure) alors on dit que f admet b pour limite en $+\infty$, ce qu'on note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = b$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ x \geq M \Rightarrow \|f(x) - b\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon.$$

2. Si A n'est pas minoré (et a donc $-\infty$ comme borne inférieure) alors on dit que f admet b pour limite en $-\infty$, ce qu'on note $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = b$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ x \leq M \Rightarrow \|f(x) - b\|_{\mathrm{F}} \leq \varepsilon.$$

b Cas des fonctions à valeurs réelles

Ici $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ c'est-à-dire que « $f : ... \longrightarrow \mathbb{R}$ ».

Définition 12

1. f tend vers $+\infty$ en a ce qu'on note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$ si et seulement si :
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in A,\ \|x - a\|_{\mathrm{E}} \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$
2. f tend vers $-\infty$ en a ce qu'on note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$ si et seulement si :
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in A,\ \|x - a\|_{\mathrm{E}} \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq M.$$

4 Propriétés des limites

a Existence par encadrement

Le bon vieux théorème des gendarmes à la sauce espaces vectoriels normés.

Propriété 9

S'il existe $b \in \mathrm{F}$ et $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que
$$\begin{aligned} &\forall x \in A,\ \|f(x) - b\|_{\mathrm{F}} \leq \varphi(x) \\ &\lim_{a} \varphi = 0 \end{aligned}$$
Alors $\lim\limits_{a} f = b$.

Propriété 10

Si f admet pour limite b en a alors $\|f\|_{\mathrm{F}}$ admet $\|b\|_{\mathrm{F}}$ pour limite en a.

b Caractérisation séquentielle

Propriété 11 (caractérisation séquentielle de la limite)

La fonction f admet pour limite b en a si et seulement si, pour *toute* suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour limite b.

Propriété 12 (caractérisation séquentielle de la continuité)

La fonction f est continue en a si et seulement si, pour *toute* suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $f(a)$.

5 Opérations sur les limites

Rien de vraiment neuf... Les théorèmes de cette section et de la suivante sont tous des théorèmes de bon sens...
On considère f et g deux applications définies sur $A \subset \mathrm{E}$ et a un point adhérent à A.

- Si f et g ont une limite *finie* en a alors $\lambda f + \mu g$ en a une aussi et $\lim\limits_a(\lambda f + \mu g) = \lambda \lim\limits_a f + \mu \lim\limits_a g$.
- Si f est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et f, g ont une limite *finie* en a alors fg a en limite en a et $\lim\limits_a(fg) = \big(\lim\limits_a f\big)\big(\lim\limits_a g\big)$.
- Si f et g sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, que f a pour limite 0 en a et que g est bornée dans un voisinage de a alors fg a une limite en a et $\lim\limits_a fg = 0$.
- Toute fonction qui a une limite en a est *bornée* au voisinage de a.
- Si f est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et que f a une limite **non nulle** en a alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $\lim\limits_a 1/f = 1/\lim\limits_a f$.

6 Limites de composées

Toujours aussi délicat : il faut vérifier que les ensembles de départ et d'arrivée sont compatibles.

Propriété 13

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés ainsi que $A \subset \mathrm{E}$, $B \subset \mathrm{F}$. On considère deux applications $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow \mathrm{G}$. On suppose a adhérent à A et b adhérent à B.
Si $\lim\limits_a f = b$ et $\lim\limits_b = c$ alors $\lim\limits_a g \circ f = c$.

7 Utilisations des coordonnées

Supposons que la dimension de F soit n et qu'une base de F soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On définit les fonctions coordonnées de $f : A \longrightarrow \mathrm{F}$ par :

$$\forall x \in A,\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k.$$

Propriété 14

La fonction f tend vers $b = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k$ en a si et seulement si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ tendent respectivement vers $b_1, \ldots, b_n$.

8 relations de comparaison

On reprend la définition donnée pour les suites ou les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 13

Soient $f : A \longrightarrow \mathrm{F}$ et $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions ainsi que a adhérent à A. On suppose que pour tout $x \neq a$, $\varphi(x) \neq 0$. On dit que :

- f est *dominée* par φ *au voisinage de* a ce qu'on écrit $f(x) = O(\varphi(x))$ si et seulement si la fonction f/φ est bornée au voisinage de a.
- f est *négligeable* devant φ *au voisinage de* a ce qu'on écrit $f(x) = o(\varphi(x))$ si et seulement si la fonction f/φ a pour limite 0 en a.

III Continuité

1 Fonctions continues, lipschitziennes

Définition 14

Une application $f : A \longrightarrow \mathrm{F}$ est *continue* si et seulement si elle est continue en tout point de A.

Notation : on note $\mathcal{C}(A, \mathrm{F})$ ou $\mathcal{C}^0(A, \mathrm{F})$ l'ensemble des applications continues de A dans F.

Définition 15

Soient $f : A \longrightarrow \mathrm{F}$ et $B \subset A$. On dit que f est continue sur B si et seulement si la restriction $f_{|B}$ est continue.

Propriété 15 (continuité et topologie)

Soit $f : A \longrightarrow \mathrm{F}$ une application continue. Pour tout ouvert (fermé) U de F, l'image réciproque $f^{-1}(U)$ est un ouvert (fermé) de E.

Définition 16

Une application $f : A \longrightarrow \mathrm{F}$ est *lipschitizienne* si et seulement si il existe un réel $k \geq 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in A^2,\ \|f(y) - f(x)\|_{\mathrm{F}} \leq k\|y-x\|_{\mathrm{E}}.$$

On dit alors que f est *k-lipschitizienne*.

Propriété 16

toute application lipschitzienne est continue.

Remarques

- La réciproque est fausse. Voir $x \longmapsto \sqrt{x}$ en 0...
- La notion de fonction lipschitzienne est en quelque sorte « entre[5] » celles de fonction continue et de fonction $\mathcal{C}^1$.

Propriété 17

La norme est lipschitzienne donc continue. On a, en fait :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \big|\|y\| - \|x\|\big| \leq \|y-x\|.$$

2 Opérations sur les fonctions continues

Rien de neuf...

Propriété 18

(1) toute combinaison linéaire de fonctions continues sur A est continue sur A.

(2) Si $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : A \longrightarrow \mathrm{F}$ sont continues alors fg l'est aussi.

(3) Si $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue et **ne s'annule pas** alors $1/f$ est continue.

(4) Si $f : A \longrightarrow B \subset \mathrm{F}$ et $g : B \longrightarrow \mathrm{G}$ sont continues alors $g \circ f$ est continue sur A.

Définition 17

- Une fonction *monomiale* est une fonction de la forme $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

[5] L'inégalité des accroissements finis dit qu'une fonction $\mathcal{C}^1$ est lipschtzienne sur tout segment

- Une fonction $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ est *polynomiale* si et seulement si elle est combinaison linéaire de fonctions *monomiales*.

Propriété 19

Toute fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ est continue.
Plus généralement toute fonction $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{K}$, polynomiale en les coordonnées dans une base de E est continue.

Propriété 20

Si f est continue alors $\|f\|$ l'est aussi.

3 Image d'un compact

Théorème 21

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Corollaire 22

(1) Soit f une application à valeurs réelles, continue sur un compact K non vide. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur K ; c'est-à-dire que f a un minimum et un maximum sur K.

(2) Soit $f : K \longrightarrow \mathrm{F}$ continue sur K compact et non vide. Alors f est bornée et :

$$\exists x \in K,\ \|f(x)\|_{\mathrm{F}} = \sup_K \|f\|_{\mathrm{F}}\,.$$

4 Continuité des applications linéaires et bilinéaires

Attention : on est en **dimension finie**.

Propriété 23

Soient E et F deux espaces vectoriels de **dimension finie** et u une application linéaire de E dans F.

(1) Il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|u(x)\|_{\mathrm{F}} \leq k\|x\|_{\mathrm{E}}$$

(2) L'application u est lipschitzienne, donc continue.

Remarque La sphère unité de E, à savoir $\mathcal{S} = \{x \in \mathrm{E} \mid \|x\|_{\mathrm{E}} = 1\}$ est un compact (car fermée et bornée) de E. D'après le second point du corollaire 22, $\|u\|$ est bornée sur $\mathcal{S}$.

Propriété 24

Soient E_1, …, E_p et F des espaces vectoriels normés de **dimension finie** et φ une application p-linéaire de $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$ dans F

(1) Pour tout choix de normes de E_1, …, E_p et F, il existe une constante $k \geq 0$ telle que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p,\ \|\varphi(x_1, \ldots, x_p)\|_{\mathrm{F}} \leq k \|x_1\|_{\mathrm{E}_1} \cdots \|x_p\|_{\mathrm{E}_p}.$$

(2) L'application φ est continue sur $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$

Corollaire 25

Sont donc continues :

(1) Un produit scalaire ;

(2) Le déterminant (d'une matrice, ou d'un endomorphisme)