Espaces vectoriels normés
Première partie : normes, suites

Stephan Banach 1892–1945

Mathématicien polonais[1]. Banach a fondé l'analyse mathématique moderne et sa contribution à la théorie des espaces vectoriels topologiques est majeure. Il s'est aussi intéressé à la théorie de la mesure, de l'intégration et aux séries orthogonales.
Dans sa thèse de doctorat, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, soutenue en 1922, il définit un raffinement des espaces vectoriels normés qui portera son nom : les espaces de Banach. Dans ces espaces vectoriels normés (qui incluent ceux de dimension finie) toutes les suites de Cauchy[2] convergent.

Table des matières

Quoi de neuf docteur ?

Presque rien. Le but de ce cours est d'étendre aux espaces vectoriels des notions d'analyse dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On va :

- étendre la notion de valeur absolue en introduisant la notion de norme ;
- faire évoluer[3] la définition de suite convergence ;

[1] Merci a Wikipedia et à MacTutor : on ne change pas une équipe qui gagne !

[2] Une suite (u_n) est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad n \geq N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$$

Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ces suites convergent au sens classique. L'avantage est qu'il n'est pas nécessaire de connaître la limite pour savoir qu'elle existe.

[3] À peine : on remplace $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$ dans la définition...

- voir qu'en dimension finie on peut se ramener à des suites numériques : on passe aux coordonnées.

Les savoir-faire

- Connaître la définition de norme ainsi que ses propriétés usuelles.
- Connaître les normes usuelles (dont les canoniques) sur $\mathbb{K}^n$.
- Adapter à un espace vectoriel normé les notions de partie bornée, de limite de suite, de comparaison de suites.
- Savoir passer par les coordonnées en dimension finie. Par exemple, savoir ramener une question de convergence de suite de vecteurs à celle de convergence des suites numériques des coordonnées de ces vecteurs dans une base donnée.
- Savoir reconnaître les normes[4] qui dérivent d'un produit scalaire. Savoir utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Les questions

1 Espaces vectoriels normés

Qu'est-ce qu'une norme ?

Voir la définition 1.

Comment montrer qu'une application est une norme ?

Méthode 1 : utiliser les trois axiomes de la définition 1.
Méthode 2 : (à utiliser dans le cas où on pense avoir une norme euclidienne) chercher un produit scalaire dont dérive la norme.

Quelles sont les normes usuelles à connaître ?

Voir la propriété 1.

Qu'appelle-t-on suite convergente ?

Voir la définition 8. Savoir qu'il n'y a presque pas de différence avec le cas des suites dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$...

[4] Les normes « 2 »...

Comment montrer qu'une suite converge en dimension finie ?

Voir le théorème 10.

I Normes et boules[5]

1 Normes sur un espace vectoriel

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application N de E dans $\mathbb{R}_+$ est une *norme* si elle vérifie :

1. $\forall x \in \mathrm{E},\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ (*séparation*) ;
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (*homogénéité*) ;
3. $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*).

Remarques

1. La seconde propriété entraîne notamment que $N(0) = 0$ (on prend $\lambda = 0$) et que $N(-x) = N(x)$.
2. En écrivant $y = (y-x)+x$ et $x = (x-y)+y$ on déduit $|N(x) - N(y)| \leq N(y-x)$.
3. Souvent on note $\|x\|$ au lieu de $N(x)$.

Définition 2

Un *espace vectoriel normé* est le couple (E, N), où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N une norme sur E.
On appelle *distance associée* à ma norme N la fonction d définie sur E^2 par

$$d(x, y) = N(y - x).$$

2 Normes classiques sur $\mathbb{K}^n$

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$. À $x = (x_1, \ldots, x_n)$ on associe :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|.$$

[5] Et pas le contraire ! On fait comme on peut...

Remarques

1. La norme $\|\cdot\|_2$ est euclidienne[6].

2. Ces normes sur $\mathbb{K}^n$ donnent aussi des normes sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ via l'identification canonique qu'on fait entre n-uplet et colonne de taille n.

Propriété 1

Les trois fonctions $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ et on a les inégalités valables pour tout $x \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

3 Boules, parties bornées

Dans cette section et jusqu'à la fin du paragraphe (E, N) désigne un espace vectoriel normé.

a Boules et sphères

Définition 3

Soient $x \in \mathrm{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle :

1. *boule ouverte* (ou tout simplement *boule*) de centre x et de rayon r l'ensemble :

$$B(x,r) = \{y \in \mathrm{E} \mid N(y-x) < r\}\,;$$

2. *boule fermée* de centre x et de rayon r l'ensemble :

$$B'(x,r) = \{y \in \mathrm{E} \mid N(y-x) \leq r\}\,;$$

3. *sphère* de centre x et de rayon r l'ensemble :

$$S(x,r) = \{y \in \mathrm{E} \mid N(y-x) = r\}\,.$$

Propriété 2 (séparation)

Soient a et b deux éléments distincts de E. Il existe un réel $r > 0$ tel que les boules fermées $B'(a,r)$ et $B'(b,r)$ soient disjointes.

[6] C'est-à-dire qu'elle est associée à un produit scalaire (ou qu'elle dérive d'un produit scalaire). Ceci sera (re)vu lors du chapitre sur les espace préhilbertiens...

b Parties bornées

Définition 4

Une partie A de E est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in A, \quad N(x) \leq M$$

c'est-à-dire si A est incluse dans une boule centrée en 0.

Exemple 1 En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que A est bornée si et seulement si il existe $x_0 \in A$ et $K > 0$ tels que $A \subset B(x_0, K)$.

Définition 5 (vecteurs unitaires)

Un vecteur x de E est dit *unitaire* ou *normé* si $N(x) = 1$, c'est-à-dire s'il est un élément de la sphère unité.

Remarque Si $x \neq 0$, alors le vecteur $y = x/N(x)$ est un[7] *vecteur unitaire associé* à x.

Définition 6 (application bornée)

Soit A un ensemble. Une application $f : A \longrightarrow$ E est *bornée* si $f(A)$ est bornée. Plus généralement f est bornée sur $B \subset A$ si $f(B)$ est bornée.

Remarque Comme une suite à valeurs dans E est une application de $\mathbb{N}$ dans E, on peut utiliser la définition précédente pour savoir ce qu'est une suite bornée.

Propriété 3

L'ensemble $\mathcal{B}(A, E)$ des applications bornées de A dans E est un espace vectoriel normé pour la norme *uniforme* $\mathcal{N}_\infty$ définie par

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x \in A} N\big(f(x)\big)$$

Remarques

1. On écrira souvent[8] : $\|f\|_{\infty,A} = \mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x \in A} N\big(f(x)\big)$.
2. En général, A est un intervalle I, E l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et la norme est la valeur absolue ou le module. On a alors :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

[7] Il y en a plusieurs : tout ceux de la forme θy avec $|\theta| = 1$.
[8] Du moins quand il n'y a pas d'ambigüité...

4 Parties convexes

Définition 7

La partie A de E est *convexe* si et seulement si :

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in A$$

Remarques

1. L'ensemble $\{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$ est le *segment* reliant x à y. On peut le noter $[x, y]$.

2. Une partie A est donc convexe si et seulement si pour tout x, y de A, le segment $[x, y]$ est entièrement dans A.

Propriété 4

Soient $x \in \mathrm{E}$ et $r \geq 0$. Les boules ouvertes et fermées de centre x_0 et de rayon r sont des parties convexes de E.

II Suites dans un espace vectoriel normé

Dans ce paragraphe (E, N) désigne un espace vectoriel normé.
L'idée de ce paragraphe est de transcrire les notions connues autour de limite de suite numérique aux suites de vecteurs. La démarche est simple : on remplace la valeur absolue $(|\cdot|)$ par une norme. Les démonstrations sont strictement les mêmes que celles avec des suites numériques. Par contre il n'y a pas de notion de limite infinie[9].

1 Suites convergentes, divergentes

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Définition 8

On dit que la suite u a pour *limite* $\ell \in \mathrm{E}$ (ou *admet* ℓ pour limite) si la suite de réels $(N(u_n - \ell))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. C'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \quad N(u_n - \ell) \leq \varepsilon.$$

La suite u est *convergente* si elle admet une limite, *divergente* sinon.

[9] C'est quoi $+\infty$ dans le plan ?

Remarque Il revient au même de dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \in B'(\ell, \varepsilon)$.

Propriété 5

La limite d'une suite u, si elle existe, est unique.

Vocabulaire On la note alors $\lim u$ ou $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

Propriété 6

Une suite convergente est bornée.

2 Opérations sur les suites convergentes

Théorème 7

Soient u et v deux suites de E convergeant respectivement vers ℓ et m. Alors pour tout nombre λ, la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $\lambda\ell + m$.

Remarque En d'autres termes, l'ensemble des suites de E qui convergent est un espace vectoriel et l'application qui a toute suite associe sa limite une forme linéaire...

Définition 9

On appelle *sous-suite* ou *suite extraite* d'une suite u toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

Propriété 8

Si u converge vers ℓ, il en est de même pour toute suite extraite de u.

III Espaces vectoriels normés de dimension finie

À partir de maintenant tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

1 Le théorème fondamental

Théorème 9

Sur un espace vectoriel E de dimension *finie* la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme choisie.

De plus si une suite converge, sa limite est indépendante de la norme choisie.

Remarque En d'autres termes :

- pour toutes les notions de limites de suites ou de fonctions on peut utiliser la norme la plus appropriée au problème ;
- on n'est pas obligé de spécifier la norme avec laquelle on travaille.

2 Suites en dimension finie

a Suites convergentes

Soit $(\vec{u}_p)$ une suite de E. Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, on peut définir les suites cordonnées $(u_{p,k})_{p\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \vec{u}_p = \sum_{k=1}^{n} u_{p,k}\vec{e}_k.$$

Théorème 10

La suite $(\vec{u}_p)$ converge si et seulement si ses suites coordonnées convergent.
Dit autrement, si on note $\vec{\ell}$ la limite de $(\vec{u}_p)$ et ℓ_k la limite de la k^{e} suite cordonnée, alors on a :

$$\vec{\ell} = \sum_{k=1}^{n} \ell_k \vec{e}_k.$$

Autrement écrit :

$$\lim_{p\longrightarrow+\infty} \vec{u}_p = \sum_{k=1}^{n} \left(\lim_{p\longrightarrow+\infty} u_{p,k} \right) \vec{e}_k$$

b Comparaison de suites

Définition 10

Soient (u_p) une suite de E et α_p une suite de réels. On dit que :

1. la suite (u_p) est *dominée* par la suite (α_p), ce qu'on écrit $u_p \underset{+\infty}{=} O(\alpha_p)$, si on a $\|u_p\| \underset{+\infty}{=} O(\alpha_p)$, c'est-à-dire si :

$$\exists M > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geq p_0,\ \|u_p\| \leq M|\alpha_p| \ ;$$

2. la suite (u_p) est *négligeable* devant la suite (α_p), ce qu'on écrit $u_p \underset{+\infty}{=} o(\alpha_p)$, si

on a $\|u_p\| \underset{+\infty}{=} o(\alpha_p)$, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geq p_0,\ \|u_p\| \leq \varepsilon |\alpha_p|.$$