# Convergence dominée et applications

## Henri Lebesgue 1875–1941

Ancien[1] élève de l'E.N.S., il eut Émile Borel comme professeur (à qui l'on doit les premiers travaux conséquents en théorie de la mesure) et directeur de thèse à Nancy[2]. Sa thèse de doctorat est *Intégration, longueur, aire* (1902) et porte sur... l'intégration. Elle annonce ainsi ses futurs travaux.
Après quelques années au lycée de Nancy[3], Lebesgue enseignera à Rennes. C'est pendant cette période qu'il se fera connaître par son élégante théorie de la mesure. Mais une brouille s'établira avec Borel à propos de la paternité de cette théorie. Professeur à la Sorbonne puis au collège de France, il sera élu à l'Académie des sciences en 1922.
Par sa théorie des fonctions mesurables (1901) s'appuyant sur les tribus boréliennes[4], Lebesgue a profondément remanié et généralisé le calcul intégral. Sa théorie de l'intégration (1902-1904) répond aux besoins des physiciens en permettant la recherche et l'existence de primitives pour des fonctions « irrégulières » auxquelles le cadre de l'intégrale de Riemann ne pouvait s'appliquer.
Dans ses Leçons sur les séries trigonométriques (1906), Lebesgue précisera tout l'intérêt de son intégrale pour l'étude des séries de Fourier et le calcul des coefficients.
La théorie de Lebesgue est le cadre idéal pour l'étude des probabilités. Kolmogorov[5] s'est appuyé sur celle-ci pour axiomatiser les probabilités.
L'intégrale de Lebesgue recouvre différentes théories préseentées auparavant et qui apparaissent alors comme des cas particuliers :

- Riemann : conçue pour les fonctions en escalier, les fonctions continues, continues par morceaux ;
- Darboux : conçue pour les fonctions bornées ;
- Stieltjes : conçue pour les fonctions à variation bornée.

Un des théorèmes remarquables de cette théorie est le théorème de convergence dominée (ou de Fatou-Lebesgue) qui, heureusement, peut être adapté à la définition classique (c'est-à-dire de Riemann) d'intégrale.

## Table des matières

[1] Je remercie encore et toujours wikipedia et MacTutor...
[2] C'est presque le régional de l'étape. Encore que : il est natif de Beauvais...
[3] C'est-y-pas Pointca' ?
[4] Du nom du mathématicien Emile Borel, celui avec lequel il s'est brouillé.
[5] Voir le premier cours de probabilités.

# I Un fil rouge

Le mini problème suivant est un concentré des questions qu'on peut poser sur le cours, donc des savoir-faire qu'il faut maîtriser...
Tout au cours de ce polycopié, nous allons étudier les fonction $\Phi$, $\Psi$ et $\Theta$ définies par

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+itx}\,\mathrm{d}t$$
$$\Theta(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Nous allons alors répondre aux questions suivantes :

1. *Ensemble de définition de* $\Psi$.
   a) Montrer que $\varphi : t \longmapsto \exp(-t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que $\Psi$ est bien définie sur $\mathbb{R}$
2. a) Justifier que $\Phi$ est $\mathcal{C}^1$ et déterminer ses variations sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que $\Phi$ a une limite en $\pm\infty$. Déterminer ces limites à l'aide de $\Psi$ (on utilisera la parité de $\varphi$).
3. Montrer que $\Psi$ et $\Theta$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\Theta$ a une limite en $+\infty$ et la déterminer.
5. *Calcul de* $\Psi(0)$
   a) Montrer que $\Theta$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $\Theta'$.
   b) Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\Theta'(x)$ à l'aide, entre autres, de $\Phi(x)$ (on pourra faire le changement de variables $u = xt$).
   c) En déduire que $H$ définie par $H(x) = \Theta(x) + (\Phi(x))^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.
   d) Déterminer $H(0)$ et en déduire la valeur de $\Psi(0)$.
6. Résoudre l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}y = 0$$

7. *Recherche de* $\Psi$
   a) Montrer que $\Psi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\Psi'$.
   b) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une équation différentielle vérifiée par $\Psi$. La résoudre et déterminer $\Psi$ sans intégrale...

Nous étudierons aussi la fonction $\Gamma$ (d'Euler) définie par la formule :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Nous chercherons son ensemble de définition, étudierons sa continuité, sa dérivabilité ainsi que sa convexité. Nous démontrerons aussi la formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

# II Suites et séries de fonctions intégrables

## 1 Le théorème de convergence dominée

**Définition 1 (convergence simple d'une suite de fonctions)**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $g$ une fonction définie sur ce même intervalle $I$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $I$ vers la fonction $g$ si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(t) = g(t)$.

**Théorème 1 (de convergence dominée)**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle $I$. Si :

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue par morceaux sur $I$ ;

(b) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** sur $I$ vers une fonction $g$ continue par morceaux sur $I$ ;

(c) il existe une fonction $\varphi$, continue par morceaux et **intégrable** sur $I$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $|f_n| \leq \varphi$ *(hypothèse de domination)*.

Alors $g$ est intégrable sur $I$ et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_I f_n = \int_I g.$$

EXEMPLES 1

1. $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$. $\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n = ?$, $I_n \sim ?$
2. Existence et limite (si elle existe) de $I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^n)^{1/n}}$.
3. Un intervalle « mobile » : limite de $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

Exemples 2 (de l'importance de l'hypothèse de domination)

1. $f_n : t \in ]0,1[ \longmapsto nt^{n-1}$, $g = 0$.
2. $f_n : t \in ]0,+\infty[ \longmapsto \frac{n}{2\sqrt{t}(1+n^2t)}$, $g = 0$.

## 2 Séries de fonctions intégrables

**Définition 2 (convergence simple d'une série de fonctions)**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et $g$ une fonction définie sur ce même intervalle $I$.
On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge simplement sur* $I$ de somme la fonction $g$ si et seulement si, pour tout $t \in I$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = g(t)$.

**Théorème 2**

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions, avec $u_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. On fait les hypothèses suivants :

(a) la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $I$ et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue par morceaux sur $I$ ;

(b) chaque $u_n$ est continue par morceaux et intégrable sur $I$ ;

(c) la série $\sum_{n\geq 0} \left(\int_I |u_n|\right)$ converge .

Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur $I$ et :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n\right)$$

Exemples 3

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2+x^2}$. On doit connaitre $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \ldots$
3. $\displaystyle h(x) = \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. On cherche à écrire $h(x)$ comme la somme d'une série.

# III Intégrales dépendant d'un paramètre

## 1 Continuité

Avant de commencer, un complément sur un lien entre suites et limites de fonctions.

**Propriété 3 (Caractérisation séquentielle de la limite)**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$, soit un élément de $I$ soit une borne de $I$.
La fonction $f$ admet pour limite $\ell$ en $a$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)$ d'éléments de $I$, qui converge vers $a$, on a $f(x_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell$.

Remarques

1. En 1re année on a déjà vu « si $f \xrightarrow[a]{} \ell$ alors pour toute suite... ». La nouveauté est la réciproque.
2. Cette définition permet de transformer toute limite de fonction en des limites de suites.
3. Il faudra savoir l'utiliser pour trouver la limite d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

**Théorème 4**

Soient $A$ et $I$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$. Si :

(a) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \in A \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $A$.

(b) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \in I \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$.

(c) Il existe une fonction $\varphi$ continue par morceaux et **intégrable** sur $I$ telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$. *(hypothèse de domination)*

Alors
La fonction $F$ définie pour tout $x$ de $A$ par $F(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $A$.

Attention : l'hypothèse de domination est primordiale. Un contre-exemple est fourni par $f : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times ]0,+\infty[ \longmapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$.

**Corollaire 5 (domination locale)**

On reprend les mêmes hypothèses que le théorème 4, mais on remplace l'hypothèse (c) par :

Pour **tout segment** $A' \subset A$, il existe une fonction $\varphi$ continue par morceaux et **intégrable** sur $I$ telle que :

$$\forall (x,t) \in A' \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

*(hypothèse de domination sur tout segment)*

Alors la conclusion reste la même, à savoir : $F$ est continue sur $A$...

Exemples 4

1. $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\mathcal{D}_g$. Continuité.
2. $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$. Ensemble de définition, continuité de $h$, limite en $+\infty$ et équivalent simple en $0$.

## 2 Limites

Pour calculer une limite d'une intégrale dépendant d'un paramètre en un point qui est une borne de $A$ on utilise le théorème de la convergence dominée et la caractérisation

séquentielle de limite (la propriété 3)
La suite de fonctions considérées est définie par : $f_n(t) = f(x_n, t)$. L'hypothèse de domination qu'on utilisera sera une qui correspond à l'hypothèse c du théorème 4.
Si $\alpha$ est un point de $A$, on utilise le théorème de continuité de la section précédente.

## 3 Dérivation

**Théorème 6**

Soient $A$ et $I$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$. Si :

(a) Pour tout $t \in I$ la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $A$.

(b) Pour tout $x \in A$,

- la fonction $t \in I \longmapsto f(x,t)$est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle $I$ ;
- la fonction $t \in I \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$.

(c) Il existe une fonction $\varphi$ continue par morceaux et **intégrable** sur $I$ telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

*(hypothèse de domination pour* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$*)*

Alors la fonction $F$ définie pour tout $x$ de $A$ par $F(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $A$ et, pour tout $x \in A$,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

*(formule de Leibniz)*

Attention : l'hypothèse de domination est primordiale. Un contre-exemple est fourni par $f : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times ]0, +\infty[ \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2+t^2}$.

**Corollaire 7**

On reprend les mêmes hypothèses que le théorème 6, mais on remplace l'hypothèse (c) par :

Pour **tout segment** $A' \subset A$, il existe une fonction $\varphi$ continue par morceaux et **intégrable** sur $I$ telle que :

$$\forall (x,t) \in A' \times I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

*(hypothèse de domination sur tout segment)*

Alors la conclusion reste la même, à savoir : $F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $A$ et...

EXEMPLE 5 Retour sur l'exemple 4.1. On montre que $g$ est $\mathcal{C}^1$, puis après le calcul de $g'$, on détermine $g$.

**Corollaire 8**

Soient $A$ et $I$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$. Si :

(a) Pour tout $t \in I$ la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^p$ sur $A$.

(b) Pour tout $x \in A$ et tout $k \in [\![0,p]\!]$, la fonction $t \in I \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $I$.

(c) Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, il existe une fonction $\varphi_k$ continue par morceaux et **intégrable** sur $I$ telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_k(t)$$

*(hypothèse de domination pour les* $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$*)*

Alors la fonction $F$ définie pour tout $x$ de $A$ par $F(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^p$ sur $A$ et, pour tout $x \in A$, tout $k \in [\![1,p]\!]$,

$$F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

*(formule de Leibniz)*

EXEMPLE 6 Classique ! Étude de $\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ : il faut notamment montrer que $\Gamma$ est $\mathcal{C}^\infty$, examiner sa concavité et en déduire son graphe.