Arbres et Graphes

I Les règles des chemins

1 SOS

On tire un lettre au hasard de chacune des urnes de la figure 1. On forme alors un mot à l'aide des lettres en respectant l'ordre du tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot SOS ?

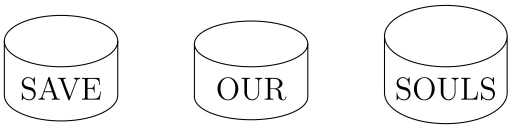

FIGURE 1 – SOS : les trois urnes

Intuitivement on voit bien qu'on a une probabilité de 1/4 de tirer le premier S, de 1/3 le O puis de 2/5 le second S. On résume ceci à l'aide d'un graphe. C'est la figure 2.

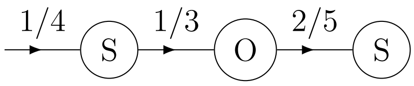

FIGURE 2 – SOS : le graphe de probabilités

Toujours aussi intuitivement, on calcule la probabilité cherchée en écrivant :

$$\mathbb{P}(\text{SOS}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{30}.$$

Formalisons ce que nous venons de faire :

Théorème 1 (première règle des chemins)
La probabilité de suivre un chemin sur un graphe est le produit des probabilité de toutes les flèches qui composent ce chemin.

2 Une broméliacée

Dans une urne, on dispose les lettres du mot ananas (voir figure 3). On tire ensuite deux lettres successivement et sans remise de cette urne. Quelle est la probabilité que la deuxième lettre tirée soit un « a » ?

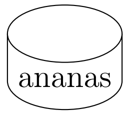

FIGURE 3 – Ananas : l'urne

Dessinons un graphe correspondant à l'expérience ne montrant que les chemins qui se terminent en la lettre cherchée. La probabilité cherchée, $\mathbb{P}(A_2)$ est la probabilité de chaque chemin qui finit en a. On a donc :

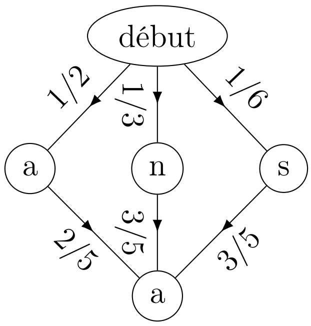

FIGURE 4 – Ananas : le graphe

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2) &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Formalisons ce que nous venons de faire :

Théorème 2 (seconde règle des chemins)
La probabilité d'aller d'un point A à un autre point B sur un graphe est la somme des probabilités de chacun des chemins reliant A à B.

Redessinons ce graphe en remarquant que on ne s'intéresse pas vraiment aux lettres n et s : elles influent de la même façon sur le second tirage. Le graphe est donné par la figure 5.
Le calcul donne encore $\mathbb{P}(A_2) = \dfrac{1}{2}$.

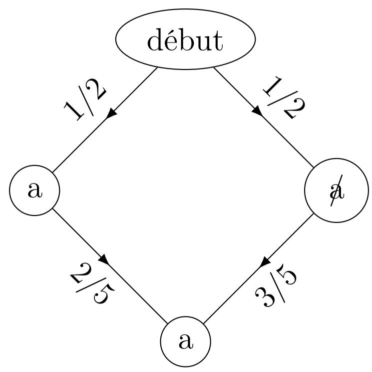

FIGURE 5 – Ananas : l'autre graphe

II Exemples

1 Météo hivernale

a L'énonce

L'hiver en Bordurie[1] est simple : on a deux choix sec ou humide. On sait que :

- Si aujourd'hui il fait sec (S) alors demain il le temps sera sec avec une probabilité 5/6.
- Par contre si aujourd'hui il fait humide (H) alors la probabilité qu'il fasse humide demain est 2/3.
- il est bien sur toujours possible que le temps ne change pas...

Aujourd'hui dimanche fait sec.

1. Quelle est la probabilité qu'il fasse sec mardi ? Mercredi ? Jeudi ?
2. J'étais en vacances longtemps et j'arrive de nuit. Quelle est la probabilité qu'à mon réveil il fasse sec ?

b Résolution

On peut résumer la situation à l'aide du graphe de la figure 6.
Pour la probabilité $\mathbb{P}(S_{\text{mardi}})$ qu'il fasse sec mardi, on lit le graphe de la figure 7 pour obtenir :

$$\mathbb{P}(S_{\text{mardi}}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

[1] Voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/Bordurie

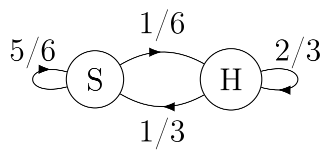

Figure 6 – Météo : le graphe

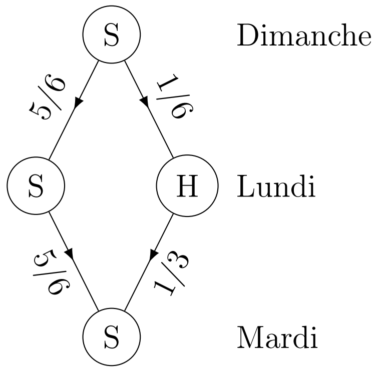

Figure 7 – Météo : trois jours

En utilisant la même méthode, on trouve ensuite :

$$\mathbb{P}(S_{\text{mercredi}}) = \frac{7}{24}$$
$$\mathbb{P}(S_{\text{jeudi}}) = \frac{11}{16}$$

Pour la météo d'un jour inconnu on peut relire le graphe de la figure 6 et déduire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) &= \frac{5}{6} \times \mathbb{P}(S) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}(H) \\ &= \frac{5}{6} \times \mathbb{P}(S) + \frac{1}{3} \times (1 - \mathbb{P}(S)) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(S) + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbb{P}(S) = \frac{2}{3}$$