Algèbre linéaire : compléments 2e partie

Olga Taussky-Todd 1906–1995

Mathématicienne austro-américaine[1]. Née en 1906 à Olmütz[2], elle a étudié les mathématiques vers 1925 à Vienne. Un de ses camarades de promotion n'était autre que Kurt Gödel[3]. Elle soutint sa thèse de doctorat en 1930 sur la théorie algébrique des nombres.
En 1931-32 elle enseigna à l'université de Göttingen où elle fut assistante d'Emmy Noether[4] et de Richard Courant[5].
En 1935 elle fut engagée comme checheur par l'université d'Oxford. Elle y rencontra son mari (Jack Todd).
À partir de 1947 elle travailla aux États-Unis. Tout d'abord comme consultante en mathématiques pour le *National Bureau of Standards* ou elle travailla sur les premiers ordinateurs. Ensuite comme enseignante à l'institut Courant (New-York) et enfin au *California Institute of Technology*[6]. Elle fut l'un des premiers à enseigner dans sa globalité ce qui, jusqu'au milieu des années[7] 40 était une série de résultats éparpillés dans plusieurs branches : l'algèbre linéaire et ses applications ainsi que la théorie du calcul matriciel. On lui doit notamment le théorème de Taussky[8][9] :

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une matrice symétrique inversible $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
> $$TA = A^{\mathsf{T}}T.$$

[1] Merci à Wikipedia et, surtout au site historique de l'université de St Andrews : « The MacTutor History of Mathematics archive » (`http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/`) qui permet de découvrir la grande et la petite histoire des mathématiques.

[2] Empire Austro-Hongrois, maintenant Olomouc, république Tchèque.

[3] Logicien autrichien. Ses théorèmes d'incomplétude indiquent qu'il existe des propositions vraies (fausses) qu'on ne peut démontrer (réfuter) ainsi que des propositions indécidables c'est à dire telles que supposer qu'elles soient vraies ou, au contraire, fausses ne rend pas les choses incohérentes. Une proposition indécidable peut être alors utilisée comme axiome ou postulat.

[4] Mathématicienne allemande. On lui doit, entre autres, la notion d'anneau noetherien, le théorème de Noether qui relie les symétries d'un système avec ses lois de conservation (à chaque symétrie sa loi de conservation).

[5] Mathématicien allemand. Élève de David Hilbert. Son ouvrage le plus célèbre, qu'il à écrit avec Hilbert est *Methods of mathematical physics*.

[6] Caltech : là où officient Leonard, Sheldon et les autres...

[7] À cette époque, il n'y avait pas réellement de cours du type « algèbre linéaire : introduction ». Il n'était pas rare qu'un étudiant ait à souffrir des définitions plus ou moins contradictoires de « vecteur » dans plusieurs cours distincts...

[8] O. Taussky, H. Zassenhaus « On the similarity transformation between a matrix and its transpose » Pacific J. Math. (9) 1959.

[9] Une démonstration est fournie par le sujet Centrale TSI mathématiques 2, 2013.

En d'autres termes : une matrice et sa transposée sont semblables à l'aide d'une matrice symétrique.

Les savoir-faire

- Savoir déterminer le noyau, l'image et le rang d'une application linéaire (directement ou à l'aide de sa matrice dans une base bien choisie).
- Savoir détecter si une application linéaire est injective, surjective ou bijective.
- Savoir lire une matrice par blocs pour détecter si un sous-espace est stable par un endomorphisme.
- Savoir faire des calculs par blocs.
- Savoir redémontrer la cas échéant les propriétés de la trace (celles décrite dans la propriété 20).

Table des matières

I Applications linéaires

Dans ce paragraphe E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1 Propriétés

Propriété 1

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

(1) L'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.

(2) L'image par u d'une famille liée est une famille liée de F.

(3) Si u est **injective** alors l'image par u d'une famille libre de E est une famille

libre de F.

Corollaire 2

Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ alors $\mathrm{Im}(u)$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par l'image par u des vecteurs d'une base de E.

Corollaire 3

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est bijective si et seulement si l'image par u de cette base $\mathcal{B}$ est une base de F.

Propriété 4 (caractérisation d'une application linéaire)

Soient $\mathcal{B} = \left(e_i\right)_{i \in I}$ une base de E et $\left(y_i\right)_{i \in I}$ une famille de F (les deux familles sont indexées par I).
Alors il existe une **unique** $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que $\forall i \in I,\ u(e_i) = y_i$.

Corollaire 5

Deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Propriété 6 (prolongement de la propriété 4)

Supposons que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_p$ et, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $u_k \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_k, \mathrm{F})$.
Alors il existe une unique $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, u_k soit la restriction à E_k de u.

2 Théorème du rang et applications

Le théorème suivant a un nom pas vraiment standard, mais le résultat qu'il présente et ses applications le rendent fondamental.

Théorème 7 (théorème de l'image)

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et G un supplémentaire (dans E) de $\mathrm{Ker}(u)$.
L'application u_1 de G dans $\mathrm{Im}(u)$ qui à tout x de G associe $u_1(x) = u(x)$ est un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(u)$.

Remarque Le nom est non standard. Souvent ce théorème est affublé du nom de « théorème du rang » même s'il ne parle pas de dimension...

Vocabulaire On dit alors que u *induit* un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(u)$.

Corollaire 8 (formule du rang)

Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et si E est **de dimension finie** alors on a :

$$\mathrm{rg}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u) = \dim \mathrm{E}.$$

REMARQUES

1. Inclus dans la formule est le fait que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie.
2. L'espace F est, a priori, de dimension quelconque.

EXEMPLES 1

1. Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et H est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\dim u(\mathrm{H}) = \dim \mathrm{H} - \dim\big(\mathrm{H} \cap \mathrm{Ker}(u)\big)$$

2. On suppose en plus que G est un espace vectoriel et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - \dim \mathrm{F} \leq \mathrm{rg}(v \circ u)$$

Corollaire 9

Soient E, F deux espaces de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, alors :

$$\mathrm{rg}(u) \leq \min(\dim(\mathrm{E}), \dim(\mathrm{F})).$$

Corollaire 10

Si E et F sont de **même dimension finie** et si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est injective ;

(ii) u est surjective ;

(iii) u est bijective.

Propriété 11 (composée)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies. Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, alors :

$$\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)).$$

Propriété 12 (composée par une bijection)

Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $g \in \mathcal{GL}(\mathrm{E})$ et $h \in \mathcal{GL}(\mathrm{F})$ alors

$$\mathrm{rg}(u \circ g) = \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(h \circ u).$$

II Sous-espaces stables et matrices par blocs

1 Sous-espaces stables

Définition 1

Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est dit *stable* par $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ si et seulement si $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$.
Dans ce cas l'endomorphisme u_1 de F défini par :

$$\forall x \in \mathrm{F},\ u_1(x) = u(x),$$

est appelé l'*endomorphisme induit* par u sur F.

Exemples 2

1. $\{0\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E.
2. Soit E de dimension finie p et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On note, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{E}_k = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_k)$. Quels sont les $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que pour tout k, E_k est stable par u ?

Propriété 13

Si deux éléments u et v de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ commutent (c'est-à-dire $u \circ v = v \circ u$) alors $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u.

Propriété 14

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base adaptée à F, c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F.
Un endomorphisme u de E laisse stable F si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Dans ce cas A est la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de l'endomorphisme induit par u sur F.

Propriété 15

Soient E un espace vectoriel et E_1, …, E_p des sous espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{E}_k$.

Alors $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ laisse stable chaque E_k si et seulement si sa matrice dans une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ adaptée à cette somme directe est *diagonale par blocs*, c'est-à-dire de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où la matrice A_k est carrée d'ordre $\dim(\mathrm{E}_k)$.

Remarque En utilisant les notations supra, on voit que pour tout k, la matrice A_k est la matrice dans la base $\mathcal{B}_k$ de l'endomorphisme de E_k induit par u.

Exemple 3 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si pour tout k, on pose $\mathrm{E}_k = \mathrm{vect}(e_k)$. Alors u laisse stable chaque droite E_k si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est *diagonale*.

2 Calculs avec des matrices par blocs

C'est simple : on calcule avec les blocs comme s'il s'agissait de nombres. Il faut seulement faire attention à des règles de compatibilité :

- Blocs de tailles égales pour sommer deux matrices.
- Blocs de tailles compatibles pour les produits. Notamment : les blocs sur la diagonale doivent être carrés.

Par exemple, si on a :

$$A, A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ D, D' \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}),\ B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

alors on peut écrire :

$$\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline 0 & D \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c:c} A' & B' \\ \hdashline 0 & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} AA' & AB' + BD' \\ \hdashline 0 & DD' \end{array}\right)$$

ains que :

$$\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline 0 & D \end{array}\right)^{\mathsf{T}} = \left(\begin{array}{c:c} A^{\mathsf{T}} & 0 \\ \hdashline B^{\mathsf{T}} & D^{\mathsf{T}} \end{array}\right)$$

De même (à savoir redémontrer !)

$$\left|\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline 0 & D \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline 0 & I_q \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{c:c} I_p & B \\ \hdashline 0 & D \end{array}\right| = \det(A) \times \det(D)$$

Attention : la formule supra ne fonctionne que pour les matrices triangulaires par blocs.

III Trace d'un endomorphisme

1 Matrices semblables

Définition 2

Deux matrices A et B sont semblables si et seulement si il existe P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Remarques

1. La relation « matrices équivalentes » est une relation d'équivalence. C'est-à-dire :
   (a) elle est réflexive : A est toujours semblable à A ;
   (b) elle est symétrique : A est semblable à B si et seulement si B est semblable à A ;
   (c) elle est transitive : si A est semblable à B et B semblable à C alors A est semblable à C.
2. On peut aussi démontrer que si A et B sont semblables alors il en est de même pour A^{T} et B^{T}.
3. Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et si E et de dimension n alors les matrices de f relativement à deux bases de E sont semblables. Pour être précis :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) &= \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} \\ &= \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot \mathrm{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}).\end{aligned}$$

2 Trace

Définition 3

Si $A = \big(a_{i,j}\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors on appelle *trace de la matrice* de A le nombre :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

Propriété 16

L'application $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathrm{tr}(A) \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire qui vérifie :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Corollaire 17

Deux matrices semblables ont même trace.

Définition 4

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle *trace d'un endomorphisme* $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ la trace de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ arbitrairement choisie.

Propriété 18

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

IV Hyperplans

Définition 5

On appelle *hyperplan* d'un espace vectoriel E (de dimension quelconque) tout sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire de dimension 1.

On dira que la codimension (HP[10]) d'un hyperplan est 1...

Propriété 19

Si E est de dimension finie n, un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si sa dimension est égale à $n-1$.

Propriété 20

une partie H d'un espace vectoriel E est un hyperplan de E si et seulement si il existe une forme linéaire φ, non nulle, telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
L'égalité $\varphi(x) = 0$ est appelée équation de H.

Exemples 4
1. $H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x + y - z - t = 0\right\}$.
2. $H = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(a) = 0\}$.
3. $H = \left\{u = \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0\right\}$

[10] La culture c'est comme...

Corollaire 21

Si φ est une forme linéaire non nulle de E, alors toute forme linéaire ψ de E qui s'annule sur $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un multiple de φ.

Corollaire 22

Si φ et ψ sont deux formes linéaires de E alors :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \psi = \lambda\varphi.$$

Définition 6

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et H un hyperplan de E.

Si $\varphi : x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ est une forme linéaire (nécessairement non nulle) dont le noyau est H alors l'équation $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ est appelée une *équation* de H relativement à la base $\mathcal{B}$.

Propriété 23

Si E est de dimension finie, toutes les équations d'un hyperplan relativement à une base fixée sont proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité non nul.