Algèbre linéaire : compléments

Hermann Günter Graßmann 1809–1877

Polymathe[1] allemand[2]. À son époque, il était connu en tant que linguiste[3] et est de nos jours reconnu en tant que mathématicien. Il était aussi physicien, néo-humaniste, érudit et éditeur.

En 1844, il publia son oeuvre mathématique la plus importante : *Die Lineare Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*[4]. Ce texte décrit, avec le vocabulaire de l'époque tout ce que nous utilisons aujourd'hui en algèbre linéaire : combinaison linéaire, famille libre, liée, génératrice, dimension etc.

Il définit le produit extérieur, qui deviendra, en dimension 3, avec Willard Gibbs et William Kingdon Clifford, le produit vectoriel usuel.

On lui doit le théorème des dimensions, qu'on appelle aussi formule de Grassmann : E étant un espace vectoriel de dimension finie, si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\dim(\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2) + \dim(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2) = \dim \mathrm{F}_1 + \dim \mathrm{F}_2.$$

Table des matières

[1] Un polymathe (du grec polymathēs) est un individu aux connaissances variées et approfondies, en particulier des connaissances en art et en science. On dit parfois « homme d'esprit universel ».

Un polymathe excelle dans de nombreux domaines qui ne sont pas nécessairement reliés. Quelques exemples de polymathes célèbres : René Descartes, Benjamin Franklin, Léonard de Vinci, Nicolas Copernic, Thomas Jefferson, Alexandre de Humboldt, Johann Wolfgang von Goethe, Isaac Asimov, Henri Poincaré, John von Neumann, Richard Francis Burton, Arthur Schopenhauer, etc.

[2] Merci à Wikipedia et à MacTutor (`http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/`) pour la photo et la biographie.

[3] Il a écrit une des premières traductions complètes du Rig-Veda qui est un quatre des grands textes canoniques de l'hindouisme. 10600 versets en environ 1000 pages agrémentées d'un dictionnaire Sanskrit de la même taille... La traduction ainsi que le dictionnaire font encore aujourd'hui autorité.

[4] La théorie de l'extension linéaire, une nouvelle branche des mathématiques.

Guide de Lecture

Mis à part la définition 6, le paragraphe I peut être omis en première lecture. Par contre, le paragraphe II apporte des nouveautés par rapport au cours de première année et doit donc être lu et compris.

I Espaces vectoriels

Dans ce paragraphe E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ce paragraphe est une généralisation du cours de première année et cherche à englober le cas de la dimension infinie. De ce fait beaucoup de définitions et propriétés sont similaires à celles du cours de première année.

1 Sous-espace engendré par une famille

Définition 1

On appelle *combinaison linéaire de vecteurs* de E tout vecteur de E de la forme $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$ où $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille finie de vecteurs de E et où les λ_k sont des nombres (des éléments de $\mathbb{K}$).

Propriété 1

Soit A une partie non vide de E.

1. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A est un sous-espace vectoriel de E. C'est le *sous-espace vectoriel de* E *engendré par* A. On le note $\mathrm{vect}(A)$.

2. $\mathrm{vect}(A)$ est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A.

Définition 2

On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{S} = \big(a_i\big)_{i \in I}$ et on le note $\mathrm{vect}(\mathcal{S})$ ou $\mathrm{vect}\big(a_i\big)_{i \in I}$, le sous-espace engendré par la partie $A = \{a_i\}_{i \in I}$. C'st donc l'ensemble des combinaisons linéaires formées avec des vecteurs de $\mathcal{S}$

Les éléments de $\mathrm{vect}\big(a_i\big)_{i \in I}$ sont donc de la forme :

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j a_j$$

où J est une partie **finie** de I et $\big(\lambda_j\big)_{j \in J}$ une famille de nombres.

2 Familles libres, familles génératrices et bases

Définition 3

Une famille $\mathcal{S}$ de vecteurs de E est *libre* si et seulement si toute sous-famille **finie** de $\mathcal{S}$ est libre. C'est-à-dire si et seulement si pour toute sous-famille **finie** $\left(a_j\right)_{j\in J}$ de $\mathcal{S}$ on a :

$$\sum_{j\in J} \lambda_j a_j = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \forall j \in J,\ \lambda_j = 0.$$

une famille est *liée* si elle n'est pas libre.

Remarques

1. Si une famille est libre (respectivement liée), alors on dit que ses vecteurs sont *linéairement indépendants* (respectivement *linéairement dépendants*).
2. Une famille $\mathcal{S}$ est liée si et seulement s'il existe une sous-famille finie de $\mathcal{S}$ qui est liée.
3. Extension au cas $I = \mathbb{N}$: la famille $\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $\{a_0, \ldots, a_n\}$ est libre. On procède de même dans les cas où I est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. À savoir utiliser dans le cas de familles de $\mathbb{K}[X]$.

Propriété 2

Si $\mathcal{S} = \left(a_i\right)_{i\in I}$ est liée alors au moins un des vecteurs de $\mathcal{S}$ est combinaison linéaire des autres.

NOTATION Si $\mathcal{S} = \left(a_i\right)_{i\in I}$ est une famille, on note, par abus, $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}, u)$ la famille définie par $\mathcal{S}' = \left(a'_i\right)_{i\in I'}$ où $I' = I \cup \{k\}$ avec $k \notin I$, $a'_i = a_i$ si $i \in I$ et $a'_k = u$.
De même, si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux familles, on peut construire une famille $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$...

Propriété 3

Soient $\mathcal{S}$ une famille libre de vecteurs de E et $u \in$ E.
La famille $(\mathcal{S}, u)$ est liée si et seulement si $u \in \mathrm{vect}(\mathcal{S})$.

Propriété 4

toute famille de polynômes **non nuls** et de **degrés deux à deux distincts** est libre.

Définition 4

Une famille $\mathcal{S}$ de vecteurs de E est une *famille génératrice* de E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de cette famille. En d'autres termes si et seulement si $\mathrm{E} = \mathrm{vect}(\mathcal{S})$.

Remarques

1. La famille $\mathcal{S} = \left(u_i\right)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si tous les vecteurs u_i appartiennent à E et si, pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe une partie finie J de I et une famille $\left(\alpha_j\right)_{j\in J}$ de nombres telles que $x = \sum_{j\in J} \alpha_j u_j$.
2. La famille $\mathcal{S} = \left(u_i\right)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si et seulement si $\mathrm{E} = \mathrm{vect}\left\{u_i \mid i \in I\right\}$.

Définition 5

On appelle *base* de E toute famille libre et génératrice de E.

Exemple 1 La famille $\left(X^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Rappels La dimension finie, c'est-à-dire le cas où il existe une famille génératrice finie a été traitée en première année. Dans le cas de la dimension finie les résultats trouvés en première année tiennent toujours :

1. Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont même cardinal. C'est la dimension de E.
2. Par convention $\dim\{0\} = 0$.
3. Si E est de dimension finie n alors pour que la famille $\mathcal{S}$ soit une base il faut et il suffit que deux des trois propriétés suivantes soient vérifiées :
   (a) $\mathcal{S}$ engendre E ;
   (b) $\mathcal{S}$ est libre ;
   (c) $\mathcal{S}$ a exactement n éléments.
4. Si $\mathcal{S}$ est libre alors $\mathrm{card}\,\mathcal{S} \leq \dim(E)$. Si $\mathcal{S}$ engendre E alors $\mathrm{card}\,\mathcal{S} \geq \dim(E)$.

Remarque Donc on voit bien qu'on est en dimension finie si et seulement si toute famille libre est finie.

Définition 6

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle *base adaptée* à F toute base de E de la forme $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ où $\mathcal{B}_1$ est une base de F.

Remarque La notation $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ veut dire : les vecteurs de $\mathcal{B}_1$, suivis de ceux de $\mathcal{B}_2$. C'est la concaténation (mise bout-à-bout) des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Exemple 2 La famille $\left(X, X^3, 1, X, X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ adaptée au sous-espace F des polynômes impairs de degré au plus 3.

II Produit et somme d'espaces vectoriels

1 Produit d'espaces vectoriels

Définition 7 (produit cartésien)

Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de A et B, noté $A \times B$ est l'ensemble :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

De même, le produit cartésien de $\left(A_i\right)_{i \in [\![1,m]\!]}$, noté $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{m} A_i$, est l'ensemble :

$$\prod_{i=1}^{m} A_i = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in [\![1,m]\!]\ a_i \in A_i\}$$

Remarques

1. Un produit cartésien de m ensembles est donc un ensemble de m-uplets.
2. Bien sûr si tous les A_i sont égaux à A, on a $\prod_{i=1}^{m} A_i = A^m$: on retrouve les écritures $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$ etc.

Définition 8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit la structure de l'espace vectoriel produit $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathrm{E} \times \mathrm{F},\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda(x, y) + (x', y') = (\lambda x + x', \lambda y + y')$$

On procède de même pour le produit cartésien $\prod_{i=1}^{m} \mathrm{E}_i$...

Propriété 5

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies n et p de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, , f_p)$. Alors :

(1) $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est de dimension $n + p$

(2) Une base de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est :

$$\left((e_1, \vec{0}_{\mathrm{F}}), \ldots, (e_n, \vec{0}_{\mathrm{F}}), (\vec{0}_{\mathrm{E}}, f_1), \ldots, (\vec{0}_{\mathrm{E}}, f_p)\right)$$

Remarques

1. On procède de même pour dire :

$$\dim\Big(\prod_{i=1}^{m} \mathrm{E}_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \dim(\mathrm{E}_i)$$

2. Pour les bases, on a le même principe... Par exemple, pour $\mathrm{E}\times\mathrm{F}\times\mathrm{G}$ on aurait une base de la forme :

$$\big((e_1,\vec{0}_{\mathrm{F}},\vec{0}_{\mathrm{G}}),\dots,(e_n,\vec{0}_{\mathrm{F}},\vec{0}_{\mathrm{G}}),(\vec{0}_{\mathrm{E}},f_1,\vec{0}_{\mathrm{G}}),\dots,(\vec{0}_{\mathrm{E}},f_p,\vec{0}_{\mathrm{G}}),(\vec{0}_{\mathrm{E}},\vec{0}_{\mathrm{F}},g_1),\dots,(\vec{0}_{\mathrm{E}},\vec{0}_{\mathrm{F}},g_q)\big)$$

3. On retrouve aussi la base canonique de $\mathbb{K}^m$.

2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 9

On appelle *somme* de p sous-espaces vectoriels F_1, F_2, …, F_p de E le sous-espace vectoriel G de E égal à :

$$\mathrm{G} = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_p \mid (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \cdots \times \mathrm{F}_p\}$$

cette somme est notée $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \cdots + \mathrm{F}_p = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$.

Remarques

1. ette somme est un sous-espace vectoriel de E car c'est l'image de l'application linéaire $\varphi : \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \cdots \times \mathrm{F}_p \longrightarrow \mathrm{E}$ définie par

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p) = x_1 + x_2 + \cdots + x_p.$$

2. On voit aussi que :

$$\sum_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k = \mathrm{vect}\Big(\bigcup_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k\Big)$$

3. Donc, si pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\mathcal{B}_k$ est une base de F_k alors une famille génératrice de la somme $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$ est $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$.

Définition 10

La somme G des p sous-espaces F_1, F_2, …, F_p de E est dite *directe* si et seulement si **l'écriture** de tout élément de cette somme sous la forme $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$ est

unique. On note alors cette somme :

$$\mathrm{G} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k.$$

Remarque On a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$ est directe si et seulement si φ est *injective*.

Propriété 6

Si F_1, F_2, …, F_p sont p sous-espaces vectoriels de E de somme $\mathrm{G} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$, alors les proprietes suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{G} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$;

(ii) $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \displaystyle\prod_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k, \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_p = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], x_k = \overrightarrow{0}$;

(iii) $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{F}_k \cap \displaystyle\sum_{j \neq k} \mathrm{F}_j = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.

Exemple 3 Soit E de base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ avec $n \geq 2$. On considère :

$$\mathrm{F}_i = \operatorname{vect}\{e_k \mid k \in I \setminus \{k\}\}, \quad \mathrm{G}_i = \{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid \mathrm{F}_i \subset \mathrm{Ker}(f)\}.$$

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{G}_k$ est directe pour $p \in [\![1, n]\!]$.

Attention Dès que $p \geq 3$, dire que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$ est directe n'équivaut pas à $\mathrm{F}_k \cap \mathrm{F}_\ell = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ pour $k \neq \ell$...

Propriété 7

Soit E un espace vectoriel tel que $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$. Si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{B}_k$ est une base de F_k alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p)$ est une base de E. On dit qu'une telle base est *adaptée à la somme directe* $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$.

La réciproque est claire :

Propriété 8

Soit $\mathcal{B}$ une base de E de la forme $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p)$.
Si on note pour tout k de $[\![1, p]\!]$, $\mathrm{F}_p = \mathrm{vect}(\mathcal{B}_k)$ alors on a :

$$\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p.$$

Propriété 9

Si E est de dimension finie et si F_1, F_2, $\ldots$,F_p sont p sous-espaces vectoriels de E alors :

$$\dim\Big(\sum_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{p} \dim(\mathrm{F}_k)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Exemple 4 Retour sur l'exemple 3. On a $\mathcal{L}(\mathrm{E}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{G}_k$.

3 Cas particulier : sous-espaces supplémentaires

Définition 11

Deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont *supplémentaires* si et seulement si $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2$.

Remarque Certains auteurs étendent cette définition au cas $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$.

Propriété 10 (en dimension finie)

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, les points suivants sont équivalents :

(i) $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2$;

(ii) $\forall x \in \mathrm{E}, \exists!(x_1, x_2) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2, x = x_1 + x_2$;

(iii) $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$;

(iv) $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}_1 + \dim \mathrm{F}_2$.

(v) $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 + \mathrm{E}_2$ et $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}_1 + \dim \mathrm{F}_2$.

Remarques

1. Dans le cas de la dimension infinie, seules subsistent les propriétés (i), (ii) et (iii).

2. Quand la dimension n'est pas connue ou dans le cas où celle-ci est infinie, on procède par analyse et synthèse :
   (a) Analyse : on suppose que $x \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$ se décompose $x = x_1 + x_2$ et on démontre l'unicité de (x_1, x_1). Ainsi on montre que la somme $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$ est directe
   (b) Synthèse : on considère la décomposition trouvée ci-dessus et on montre qu'elle fonctionne pour tous les vecteurs de E. Ainsi on montre que $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2$.

Exemples 5 (classiques)

1. $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ où $\mathcal{P}$: fonctions paires et $\mathcal{I}$: fonction impaires. La décomposition est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$
2. $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ où $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$: matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$: matrices antisymétriques. La décomposition est donnée par :
$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$$
3. Deux droites distinctes du plan vectoriel.
4. Un plan vectoriel et une droite (non incluse dans ce plan) dans l'espace de dimension 3.

Remarque On le verra plus tard, les applications qui donnent la décomposition sont des projecteurs. Ce sont les projecteurs associés à la décomposition en somme directe de E.

La division euclidienne fournit un autre exemple :

Propriété 11

Soit P un polynôme de degré $n+1$ de $\mathbb{K}[X]$. Si $P \cdot \mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des multiples de P alors :
$$\mathbb{K}[X] = P \cdot \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_n[X].$$